1. (2 pontos) Jurema tem uma folha de cartolina retangular com dimensões 3 cm $\times$ 4 cm. Ela gostaria de fazer uma caixa sem tampa cortando quadrados iguais nos quatro cantos da folha e dobrando para cima os quatro lados. Determine as dimensões da caixa que Jurema pode fazer de modo que seu volume seja máximo.

Solução:

Seja x a medida do lado de cada quadrado que cortamos no canto da folha. De acordo com a descrição, as dimensões da caixa serão altura x, lado $4-2x$ e lado $3-2x$. Observe que $2x$ tem de ser menor que 3, logo $x \in [0, 3/2]$. Assim, o volume $V(x)$ será

$$V(x) = x(3-2x)(4-2x) = 4x^3 - 14x^2 + 12.$$

Temos

$$V'(x) = 12x^2 - 28x + 12.$$

Assim,

$$V'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{6}(7 \pm \sqrt{13})$$

e esses são os pontos críticos. Analisando o sinal de V', vemos que em $x = \frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$ a função V muda de crescente para decrescente. Portanto o ponto $x = \frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$ é ponto de máximo. O outro ponto crítico não está no domínio de interesse $[0, 3/2]$, pois $\frac{1}{6}(7+\sqrt{13}) > 3/2$. Para concluir que $x = \frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$ é o máximo global, basta observar que nos extremos do intervalo $[0, 3/2]$ a função V vale zero.

Portanto, as dimensões da caixa são: altura $\frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$, um lado da base $3-\frac{1}{3}(7-\sqrt{13})$ e o outro lado da base $4-\frac{1}{3}(7-\sqrt{13})$.

2. (3 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x})}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-3x}dx.$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = \sqrt{x}$, obtemos $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Assim, a integral fica

$$2\int \frac{\cos u}{\sin^2 u}du.$$

Agora, com $v = \sin u$, temos $dv = \cos u du$. Assim,

$$2\int \frac{\cos u}{\sin^2 u}du = 2\int \frac{1}{v^2}dv = \frac{-2}{v} + C = \frac{-2}{\sin u} + C = \frac{-2}{\sin(\sqrt{x})} + C.$$

(b) O denominador fatora-se segundo $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x-1)(x+3)$. Assim pelo método da decomposição em frações parciais, procuramos A, B, C tais que

$$\frac{C}{x} + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = x + 1.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, vemos que é preciso

$$C(x-1)(x+3) + Ax(x+3) + Bx(x-1) = x + 1.$$

Tomando $x = 1$, obtemos $4A = 2$. Tomando $x = -3$, obtemos $12B = -2$. Tomando $x = 0$, obtemos $-3C = 1$. Assim, $A = 1/2$, $B = -1/6$ e $C = -1/3$. Logo,

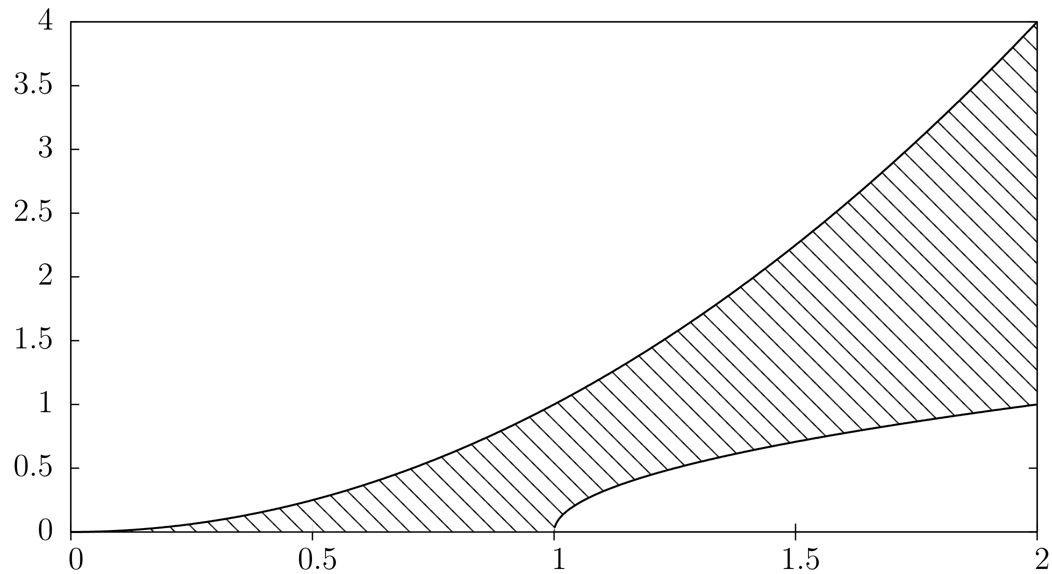
$$\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 - 3x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+3| - \frac{1}{3}\ln|x| + C.$$

3. (2 pontos) Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região R, situada no primeiro quadrante, limitada pelas retas $x = 2$ e $y = 0$ e pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x-1}$.

Solução:

A área a ser rotacionada em torno do eixo x é a seguinte:



Assim, teremos

$$V = \int_0^2 \pi x^4 dx - \int_1^2 \pi(x-1)dx$$

$$= \frac{\pi}{5}2^5 - \pi\Big[\frac{x^2}{2} - x\Big]_1^2 = \frac{32\pi}{5} - \pi(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1) = \frac{32\pi}{5} - \frac{\pi}{2}.$$

4. Verifique se cada integral imprópria é convergente ou divergente. Caso seja convergente, calcule seu valor:

   (a) (1 ponto)
   $$\int_{1/3}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx.$$

   (b) (1 ponto)
   $$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx.$$

Solução:

(a) Como a função $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$ tem uma assíntota vertical em $x = 1/3$, a integral é imprópria em $1/3$. Então,

$$\int_{1/3}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = \lim_{t\to(1/3)+} \int_{t}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx.$$

Uma primitiva de $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$ é (fazendo a substituição $u = 3x-1$, donde $du/3 = dx$)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/3}du = \frac{1}{2}u^{2/3} = \frac{1}{2}(3x-1)^{2/3}.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to(1/3)+} \int_{t}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to(1/3)+} \left[(3x-1)^{2/3}\right]_t^3 = \frac{1}{2}\lim_{t\to(1/3)+}(8^{2/3}-(3t-1)^{2/3})$$

$$= \frac{1}{2}8^{2/3} - \frac{1}{2}\lim_{t\to(1/3)+}(3t-1)^{2/3} = \frac{1}{2}8^{2/3} - \frac{1}{2}0^{2/3} = \frac{1}{2}8^{2/3}.$$

Assim, a integral imprópria é convergente.

(b) Agora, a integral é imprópria pois o intervalo de integração é ilimitado. Temos

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{3}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx.$$

Usando a primitiva já calculada, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{3}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \left[(3x-1)^{2/3}\right]_3^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}((3t-1)^{2/3}-8^{2/3}) = +\infty.$$

Logo, a integral imprópria é divergente.

5. (1 ponto) Considere a função $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_{0}^{x^2} \frac{\sin(t^2)}{t^\alpha}dt, \qquad 0 < \alpha < 3.$$

Determine o valor de α, sabendo que $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 2$.

Solução:

Calculemos $F'(x)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela regra da cadeia, temos

$$F'(x) = \frac{\sin(x^4)}{x^{2\alpha}} \cdot 2x = 2\frac{\sin(x^4)}{x^{2\alpha-1}}.$$

Para que $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = 2$, vemos (usando o limite trigonométrico $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) que é suficiente que $2\alpha - 1 = 4$, ou seja, $\alpha = 5/2$.