1. (3 pontos) Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^4+x^2}}{4x^2}$,

(b) $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{x+1}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Solução:

(a) Usando, na mudança de linha, a continuidade da função $\sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^4+x^2}}{4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{3x^4+x^2}{16x^4}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16x^2}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16x^2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{16}+0} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(b) Fazendo a substituição $u=\sqrt{1+x}$, obtemos $du = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$, ou $2udu = dx$. Assim,

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int ue^u\,du.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int ue^u\,du = 2\big(ue^u - \int e^u\,du\big) = 2\big(ue^u - e^u\big)$$
$$= 2\big(\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x+1}}\big).$$

Então,

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\big[\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x+1}}\big]_1^2$$
$$= 2\big(\sqrt{3}e^3 - e^3 - \sqrt{2}e^2 + e^2\big).$$

(c) Fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, donde $dx = \cos\theta d\theta$, obtemos

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$
$$= \int 2\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta = \int 1-\cos(2\theta)\,d\theta$$
$$= \theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + C = \theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C$$
$$= \arcsin x - x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Obs: Com a substituição $x = \cos\theta$ pode chegar-se a um resultado parecido mas igualmente correto. Além disso, a primitiva de $\operatorname{sen}^2\theta$ pode ser resolvida por partes.

2. (2 pontos) Determine a equação da reta tangente à curva $\left(2x^2 + y^2\right)^6 = 64x + y$ no ponto $(1, 0)$.

Solução:

Supondo que y é uma função de x e derivando em ordem a x,

$$6\left(2x^2 + y^2\right)^5(4x + 2yy') = 64 + y'.$$

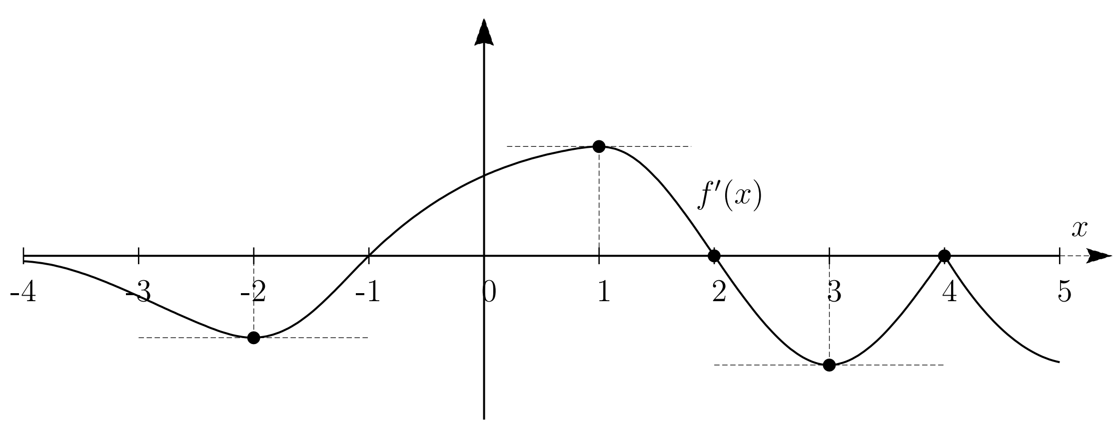
Substituindo $(x, y) = (1, 0)$,

$$6 \cdot 2^5 \cdot 4 = 64 + y' \iff y' = 11 \cdot 64 = 704.$$

Assim, a equação da reta tangente em $(0, 1)$ é

$$y - 0 = 704(x - 1).$$

3. (2 pontos) Seja $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$, **cuja derivada** $f'(x)$ tem o seguinte gráfico:



Determine:

(a) Todos os pontos críticos de $f(x)$.

(b) Os intervalos onde $f(x)$ é crescente e onde $f(x)$ é decrescente. Justifique.

(c) Todos os pontos de máximo e mínimo local de $f(x)$. Justifique.

(d) Todos os pontos de inflexão de $f(x)$. Justifique.

Solução:

(a) (valor 0.3) Os pontos críticos de uma função $f(x)$ **ocorrem sempre** nos pontos onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)\nexists$. Pelo gráfico de $f'(x)$ do enunciado, são os pontos onde $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$.

(b) (valor 0.4) Uma função derivável é crescente num intervalo I quando $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$ e é decrescente em I quando $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$. A função da questão, pelo enunciado, está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ e, pelo gráfico de f' tem-se $f'(x) > 0$ quando $x \in (-1, 2)$ e $f'(x) < 0$ quando $x \in (-\infty, -1) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$, logo $f(x)$ é crescente em $(-1, 2)$ e decrescente em $x \in (-\infty, -1) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

Observação: são aceitos também os intervalos fechados em vez de abertos.

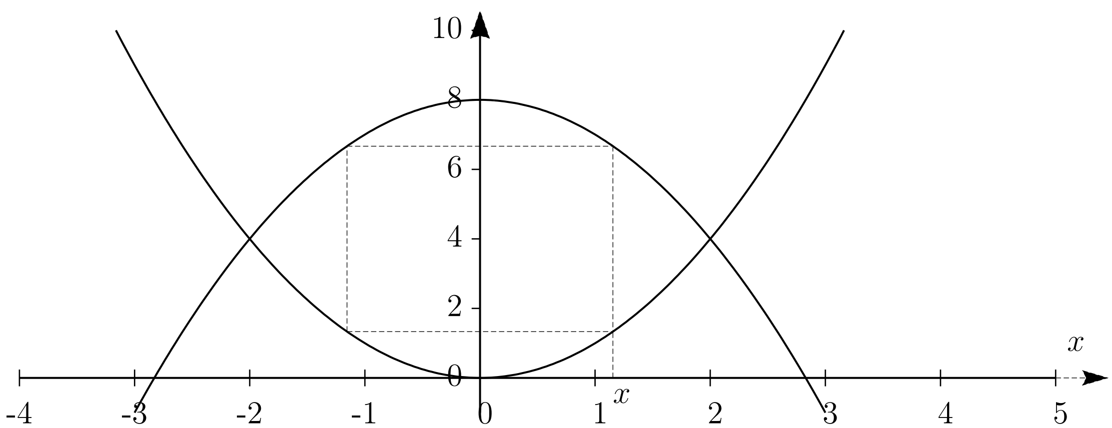
(c) (valor 0.6) Os **únicos candidatos a** pontos de máximo/mínimo locais de uma função $f(x)$ são os pontos críticos de $f(x)$. Pelo resultado do item (a) são os pontos em que $x = -1$, $x = 2$ e $x = 4$. **Comprova-se** o que são realmente utilizando o teste da derivada primeira de $f(x)$, cujo gráfico foi fornecido, e o resultado do item (b):
$x = -1$; $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, -1)$ e crescente em $(-1, 2)$, logo f tem ponto de mínimo local quando $x = -1$.
$x = 2$; $f(x)$ é crescente em $(-1, 2)$ e decrescente em $(2, 4)$, logo f tem ponto de máximo local quando $x = 2$.
$x = 4$; $f(x)$ é decrescente em $(2, 4)$ e em $(4, +\infty)$, logo f não tem ponto de mínimo nem de máximo local aí.

(d) (valor 0.7) Os pontos de inflexão de $f(x)$ são onde ocorre mudança na concavidade do gráfico de $f(x)$. **Os únicos candidatos** a pontos de inflexão são os pontos críticos de $f'(x)$, ou seja, onde $f''(x) = 0$ ou onde $f''(x)\nexists$. Do gráfico de f' do enunciado são os pontos onde $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$. **Comprova-se** se são realmente analisando os sinais de f'', pois, o sinal deve ser diferente em intervalo anterior e posterior ao valor de x do ponto de inflexão. Supondo $g = f'$ e $g' = f''$, pelo teste da derivada primeira, o sinal de f'' positivo/negativo corresponde ao crescimento/decrescimento, respectivamente, em f'. Pelo gráfico de f' teremos então $f''(x) > 0$ em $(-2, 1) \cup (3, 4)$ e $f''(x) < 0$

em $(-\infty, -2) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$. Logo:
$x = -2$; $f''(x) < 0$ em $(-\infty, -2)$ e $f''(x) > 0$ em $(-2, 1)$;
$x = 1$; $f''(x) > 0$ em $(-2, 1)$ e $f''(x) < 0$ em $(1, 3)$;
$x = 3$; $f''(x) < 0$ em $(1, 3)$ e $f''(x) > 0$ em $(3, 4)$;
$x = 4$; $f''(x) > 0$ em $(3, 4)$ e $f''(x) < 0$ em $(4, +\infty)$.
Logo f tem ponto de inflexão em todos os valores de x obtidos acima.

4. (2 pontos) Determine as dimensões do retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados que tenha área máxima, sabendo-se que o retângulo está inscrito na região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$.

Solução:



Seja $A(x)$ a área do retângulo, como na figura. Então, $A(x)$ está definida para $x \in [0, 2]$, pois esses são as abcissas dos pontos de interseção das duas parábolas (0,2 pt.). Como a altura h do retângulo é $h = 8-2x^2$, tem-se $A(x) = 2x(8-2x^2)$ (0,5 pt.). Resolvendo $A'(x_0) = 0$, achamos $x_0 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (0,3 pt.). Como $A''(x_0) = -24x_0 < 0$, concluímos que x_0 é ponto de máximo local (também poderia usar o teste da primeira derivada) (0,5 pt.). Como $A(0) = A(2) = 0$ (0,3 pt.), concluímos que x_0 é ponto de máximo global e $h = \frac{16}{3}$ (0,2 pt.).

5. (1 ponto) Avalie a integral

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx.$$

Solução:

A função $\frac{1}{(x-3)^2}$ possui uma assíntota vertical em $x = 3$, portanto temos uma integral imprópria. Assim,

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx &= \int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^5 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \lim_{a\to 3-} \int_2^a \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \lim_{b\to 3+} \int_b^5 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \lim_{a\to 3-} \Big[-\frac{1}{x-3}\Big]_2^a + \lim_{b\to 3+} \Big[-\frac{1}{x-3}\Big]_b^5 \\ &= \lim_{a\to 3-} \Big(-\frac{1}{a-3} + \frac{1}{2-3}\Big) + \lim_{b\to 3+} \Big(-\frac{1}{5-3} + \frac{1}{b-3}\Big).\end{aligned}$$

Observemos que qualquer dos dois limites é infinito, logo a integral imprópria diverge. Nota para quem achou o valor $-3/2$ para a integral: esse valor está errado, e mesmo assim foi contado o cálculo correto da primitiva, apesar da resolução errada do problema. Então, não vale a pena pedir revisão por isso.