Questões dissertativas

1. (2,1) Considere as superfícies: S_1 dada por $3x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e S_2 dada por $z = y/\sqrt{2}$.

(a) (0,4) Identifique e esboce S_1.

Resolução:
A superfície é um hiperboloide (elítico) de uma folha ao redor do eixo z, que intersecta o eixo x nos pontos $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$ e intersecta o eixo y nos pontos $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$.

(b) (0,4) Identifique e esboce S_2.

Resolução:
A superfície é é um plano perpendicular ao plano yz contendo a reta $z = y/\sqrt{2}$, que passa pelo ponto $(0, 0, 0)$.

(c) (1,3) Dê uma parametrização da curva espacial $C = S_1 \cap S_2$.

Resolução:
A projeção da curva C sobre o plano xy satisfaz a equação $3x^2 + y^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, isto é,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Uma parametrização desta projeção de C, uma elipse, é

$$\sigma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\sin t\right), t \in [0, 2\pi].$$

Logo uma parametrização de C é

$$\sigma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\sin t, \sin t\right), t \in [0, 2\pi].$$

2. (1,5) Um tanque inicialmente ($t = 0$) contém 1000 L de água pura. Em cada instante $t > 0$, é introduzida no tanque água salgada com uma concentração de sal de $0,2$ Kg/L a uma vazão de $(2 - \operatorname{sen} t)$ L/min, ao passo que a mistura homogênea sai do tanque a uma vazão de 2 L/min. Seja $Q(t)$ a quantidade (em Kg) de sal no tanque após t minutos.

(a) (0,7) No instante $t > 0$, qual o volume de água $V(t)$ dentro do tanque?
Resolução:

$$V'(t) = (2 - \operatorname{sen} t) - 2 = -\operatorname{sen} t$$

$$V(t) = \cos t + 999 \quad \text{pois} \quad V(0) = 1000$$

(b) (0.8) Qual é a equação diferencial em $Q(t)$ que modela este problema de misturas?

Resolução:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

$$\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{min}}\right)\frac{dQ}{dt} = 0,2\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{L}} \times (2 - \operatorname{sen} t)\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} - \frac{Q(t)}{V(t)}\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{L}} \times 2\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$$

isto é,

$$\frac{dQ}{dt} = 0,2\,(2 - \operatorname{sen} t) - \frac{2Q}{\cos t + 999}$$