Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática

Gabarito da questão dissertativa da prova de Cálculo II (07/11/2017)

Questão: (2,3 pontos)

Considere a função $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$.

1. Encontre e classifique todos os pontos críticos de $f(x,y)$. Justifique.
   Solução - (valor $1,0$)

   Temos $\nabla f = (4x-4, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0)$.
   Como $f_{xx} = 4 > 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6 > 0$, $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = -24 < 0$, então o ponto crítico $(1,0)$ é ponto de mínimo relativo.

2. Encontre o máximo e mínimo absolutos de $f(x,y)$ restrito ao domínio

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3/4\},$$

   caso existam. Justifique. (Dica: $\sqrt{3} \geq 1,7$)
   Solução - (valor $1,3$)

   Como f é contínua em D que é um conjunto limitado e fechado, então podemos garantir que f assume um máximo e um mínimo absoluto em D.

   No interior: Verificamos, primeiramente, que o ponto crítico $(1,0)$ encontrado no item anterior não pertence ao interior de D.

   Na fronteira: Seja $g(x,y) = x^2 + y^2$. Como $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ na fronteira de D, f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, vamos procurar por candidatos na fronteira, usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

   $$\begin{cases} 4(x-1) = \lambda 2x \\ 6y = \lambda 2y \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \lambda = 3 \\ x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

   Se $y = 0$, pela terceira equação, temos que $x = \sqrt{3}/2$ ou $x = -\sqrt{3}/2$.

   Se $\lambda = 3$, pela primeira equação temos que $x = -2$, e, substituindo na terceira equação, temos que $y^2 = -13/4$, o que é impossível.

   Calculando

   $$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} - 5,$$
   $$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{3}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} - 5,$$

   obtemos que o máximo ocorre no ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e o mínimo ocorre no ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.