Questões dissertativas

Questão 1. (1,5) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

Resolução:

1) Solução homogênea

Equação caraterística: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Solução particular: $y_p = Ax^2 e^{-x}$

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 2e^{-x} \Leftrightarrow A = 1$$

3) Solução geral

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. (2,1) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y - z$$

no domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Resolução:
Como f é contínua e D é um conjunto limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass f tem máximo e mínimo absolutos em D.

1) Interior de D: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$

Como f não tem pontos críticos, o máximo e mínimo absolutos de f em D têm de ocorrer na fronteira de D

2) Fronteira de D: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Note que $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ na fronteira de D.
Usando Multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x & (1) \\ 2 = \lambda 2y & (2) \\ -1 = \lambda 2z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

De (1) tiramos que $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

Se $x = 0$ obtemos

$$\begin{cases} y = 1/\lambda \\ z = -1/(2\lambda) \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow\ 1/\lambda^2 + 1/(4\lambda^2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Logo obtemos os pontos $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ e $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Se $\lambda = 1$ obtemos

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = -1/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{Sem solução}$$

Como $f(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$ e $f(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$, concluímos que o máximo e mínimo absolutos de f em D são, respectivamente, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.