

Lista de Exercícios: equações diferenciais

Questão 1: Ache a solução geral das seguintes equações

$$(1) \frac{dy}{dx} = 4x^3y^2;$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = (6t + 3)x^{2/3};$$

$$(3) \frac{du}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{u^2};$$

$$(4) x^2 f \frac{df}{dx} + 2x f^2 = 0;$$

$$(5) y'' - 2y' = x + e^{2x}.$$

Questão 2: Ache a solução particular dos seguintes problemas de valor inicial

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y + 1}, y(3) = 1;$$

$$(2) y' + \frac{1}{t}y = \frac{1+t}{t}e^t, y(1) = 2;$$

$$(3) y'' - 2y' + y = xe^x + 4, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Questão 3: Considere a equação logística

$$x' = (a - bx)x$$

Sabendo que para a solução com condição inicial $x(0) = 1$ temos $x'(0) = 4$ e para a solução com condição inicial $x(0) = 2$ temos, também, $x'(0) = 4$, encontre o limite populacional $M = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ de qualquer solução positiva.

Questão 4: Sabendo que $y(x) = 2xe^{-2x}$ é solução da equação

$$a \frac{dy}{dx} + by = 4e^{-2x},$$

determine os valores de a e b .

Questão 5: Diga se cada sentença abaixo é verdadeira ou falsa, justificando.

(1) Suponha que y_1 e y_2 sejam soluções da equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Então $y = 2y_1 - 3y_2$ é solução da equação.

(2) Sabendo que $y_1 = 1$ e $y_2 = x^{1/2}$ são soluções da equação

$$y''y + (y')^2 = 0,$$

então $y = c_1 + c_2x^{1/2}$ é solução da equação, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Questão 6: Um tanque contém inicialmente 1000 L de água pura. Uma solução salina com concentração de 100 miligramas de sal por litro de solução é injetada no tanque a uma taxa de 10 L/min e a solução no tanque, bem misturada, sai do tanque à mesma taxa de 10 L/min.

- (1) Encontre uma equação diferencial para a evolução $y(t)$ da quantidade de sal no tanque, em kilogramas, em função do tempo t , em minutos.
- (2) Resolva a equação com a condição inicial apropriada e determine a quantidade de sal, no tanque em cada instante t .

Questão 7: Um tanque com capacidade de 100 litros contém inicialmente 80 litros de solução de salmoura com $1/8$ kg/L de sal. No instante $t = 0$ começa-se a adicionar ao tanque outra solução de salmoura com 1 kg/L de sal, à taxa de 4 litros por minuto, enquanto a mistura, homogênea, escoar do tanque à taxa de 8 litros por minuto. Determine a quantidade de sal no tanque quando este contém exatamente 40 litros de solução.

Questão 8: Um sistema de um corpo de 1 kg pendurado por uma mola está em equilíbrio e com a mola tendo sido esticada em 0,2 m a partir do seu comprimento natural de equilíbrio. Se o corpo for impulsionado a partir do equilíbrio com uma velocidade para baixo de 14 m/s e uma força externa de $F(t) = (28 \cos(7t) + 56 \sin(7t))$ N (onde um Newton é $\text{N} = \text{kg m/s}^2$) agir sobre o corpo (por exemplo, oscilando o extremo superior da mola), determine a posição do corpo em cada instante t . Despreze a resistência do ar e utilize a aceleração gravitacional como sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.