Lista de Exercícios: curvas parametrizadas

Questão 1: Escreva a equação cartesiana da curva e faça um esboço indicando a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

(1) $x(t) = \operatorname{sen} t,\ y(t) = \operatorname{cossec} t,\ 0 < t < \pi/2$;

(2) $x(\theta) = \sec\theta,\ y(s) = \operatorname{tg}\theta,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$;

(3) $x(s) = \ln s,\ y(s) = \sqrt{s},\ s \geq 1$;

(4) $x(t) = \cos^2 t,\ y(s) = \overset{2}{\operatorname{sen}}\, t,\ 0 < t < \pi/2$.

Questão 2: Esboce a curva C definida por $\vec{r}(t)$ e determine o sentido no qual ela é percorrida:

(1) $\vec{r}(t) = (9 - 4t, -4 + 6t, 3 + 3t)$ $(t \in \Re)$;

(2) $\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\operatorname{sen}(t))$ $(-\pi/2 \leq t \leq \pi)$;

(3) $\vec{r}(t) = a\cos(t)\hat{i} + a\operatorname{sen}(t)\hat{j} + bt\hat{k}$ $(t \geq 0)$;

(4) $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + (8 - 2t^2)\hat{j}$ $(-2 \leq t \leq 2)$;

(5) $\vec{r}(t) = \dfrac{t}{2}\cos(t)\hat{i} + \dfrac{t}{2}\operatorname{sen}(t)\hat{j}$ $(0 \leq t \geq 3\pi)$.

Questão 3: Determine o comprimento das curvas dadas:

(1) $\vec{r}(t) = (5t, 4t^2, 3t^2)$ $(0 \leq t \leq 2)$;

(2) $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{i} + t^3\hat{j} + 6t\hat{k}$ $(0 \leq t \leq 1)$;

(3) $\vec{r}(t) = e^t\cos(t)\hat{i} + e^t\hat{j} + e^t\operatorname{sen}(t)\hat{k}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$;

(4) $\vec{r}(t) = t\sqrt{2}\hat{i} + e^t\operatorname{sen}(t)\hat{j} + 6t\hat{k}$ $(0 \leq t \leq 1)$;

(5) $\vec{r}(t) = (t^2,\ \operatorname{sen}(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\operatorname{sen}(t))$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

Questão 4: Dê uma parametrização da curva.

(1) Um arco do círculo $x^2 + y^2 = 4$ ligando os pontos $P = (\sqrt{3}, 1)$ e $Q = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

(2) A reta $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$;

(3) O círculo $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$;

(4) O segmento de reta ligando os pontos $P = (1, -2, 3)$ e $Q = (4, 6, 3)$;

(5) A elipse $9x^2 + 18x + 4y^2 - 16y = 11$;

(6) A parábola com vértice $(-2, -1)$, foco $(-5, -1)$ e diretriz $x = 1$.

Questão 5: Seja P um ponto a uma distância d do centro de uma roda de raio r, que gira sem deslizar sobre o eixo x. Reproduzindo o esquema que usamos para parametrizar a cicloide (caso em que $d = r$), mostre que a curva descrita pelo ponto P, chamada trocoide tem equações paramétricas

$$x(\theta) = r\theta - d \operatorname{sen}\theta,\ y(\theta) = r - d\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}.$$

Questão 6: Seja C a curva com equações paramétricas

$$x(t) = 1 + 2\ln(1+t),\ y(t) = 1 + (1+t)^2,\ t > -1.$$

(1) Determine uma parametrização da reta tangente à curva C no ponto $(1, 2)$;

(2) Determine uma parametrização da reta normal à curva C no ponto $(1, 2)$;

(3) Calcule dy/dx sem usar a equação cartesiana de C;

(4) Esboce a curva.

Questão 7: Um corpo de massa m tem uma trajetória dada por $\vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\operatorname{sen}(\omega t))$, onde t é o tempo.

(1) Esboce a trajetória do corpo, indicando o sentido do movimento e a posição inicial;

(2) Encontre os vetores velocidade e aceleração ;

(3) Mostre que o vetor força pode ser escrito como $\vec{F}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t)$. O que isso indica sobre a direção e o sentido do vetor aceleração ?

Questão 8: Um objeto de massa m é lançado do solo com uma velocidade $\vec{v_0}$, que faz um ângulo α com a horizontal (despreze a resistência do ar).

(1) Esboce a trajetória do corpo, indicando o sentido do movimento;

(2) Encontre $\vec{r}(t)$;

(3) Para um α fixo, determine a altura máxima atingida pelo corpo;

(4) Para que valor de α o corpo percorrerá a maior distância horizontal antes de tocar o solo?

(5) Encontre $\vec{r}(t)$ quando o corpo é lançado de uma altura inicial $h_0 > 0$.

Questão 9: Um objeto de massa m é lançado do solo com uma velocidade $\vec{v_0}$, que faz um ângulo α com a horizontal (considere a situação inicial como sendo idêntica a do exercício anterior). Sobre esse corpo, agem a força peso e uma forą de resitência do ar, que é dada por $\vec{R} = -k(v_x, v_y)$. Encontre $\vec{r}(t)$.

Questão 10: Resolva a seguinte equação vetorial:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t)) = \left(4x - 2y, 2x - \frac{te^t}{2}\right), \text{ onde } \vec{r}(0) = (2, 0)$$

Questão 11: Uma partícula se move ao longo de uma curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

(1) Ache a expressão do vetor velocidade $V(t)$;

(2) Se o vetor velocidade é dado por $V(t) = \left(1, \dfrac{-2y(t)}{t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2}\right)$, $t > 0$, determine a posição da partícula em cada instante, resolvendo as equações diferenciais;

(3) Se a partícula, no instante $t = 2$, passa pelo ponto $P_2 = (3, 1)$, determine os valores das constantes que aparecem no item anterior.

Questão 12: Suponha que a posição de duas partículas no instante t seja dada por $\sigma(t) = (2\sec t, 2\operatorname{tg} t)$, $0 \leq t < \pi/2$ e $\alpha(t) = (5\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, respectivamente.

(1) Ache as equações cartesianas das duas trajetórias;

(2) Trace as trajetórias de ambas as partículas;

(3) Quantos pontos de interseção existem?

(4) Essas partículas alguma vez estão no mesmo lugar ao mesmo tempo? Se sim, encontre os pontos de colisão. Se não, justifique porque.

Questão 13: Considere a curva espacial (espiral) parametrizada por $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$.

(1) Calcule o comprimento de arco entre $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$, para $t > 0$.

(2) Mostre que o comprimento do arco entre $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$ tem um limite finito quando $t \to +\infty$.