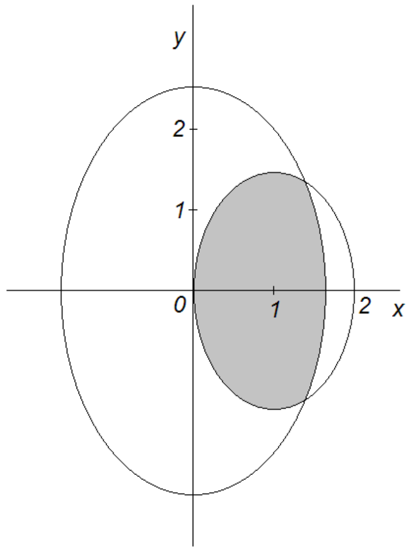
Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Primeira prova - 24/09/2018

TEMPO DE PROVA: 2,5 horas

Questão 1: (2 pontos)

Calcule a área da região plana $R = \{\, (x,y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 6,\, 2x^2 + y^2 \leq 4x \,\}$.



(*Dica*: Fazer uma mudança de variáveis compatível com a equação da maior elipse.)

Solução:

Ponha $x = \sqrt{3}\, r\cos\theta$, $y = \sqrt{6}\, r \operatorname{sen}\theta$. O Jacobiano desta transformação é $3\sqrt{2}\, r$, e o bordo da menor elipse $2x^2 + y^2 = 4x$ pode ser escrito $r = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$, que coincide com o bordo $r = 1$ da maior elipse quando $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$. Pela simetria em relação o eixo-x, a área A da interseção R é

$$A = 2\left[3\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^1 r\,dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} r\,dr\,d\theta\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\operatorname{sen}(2\theta)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{7}{6}\sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Questão 2: (2 pontos)

Calcule o volume do sólido delimitado por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4,\ x \geq \mathbf{1},\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

Solução:

Ponha $x = r\cos u$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\, r\operatorname{sen}u\,\cos v$ e $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\, r\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v$. O Jacobiano desta transformação é $\frac{1}{\sqrt{6}}r^2\operatorname{sen}u$. Daí, devemos integrar na região dada por

$$r^2 \leq 4 \qquad r\,\cos u \geq 1 \qquad r\operatorname{sen}u\,\cos v \geq 0 \qquad r\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v \geq 0.$$

Como $r \geq 0$, a segunda desigualdade implica $\cos u \geq 0$, logo $0 \leq u \leq \pi/2$. Juntando à primeira desigualdade, temos $\frac{1}{\cos u} \leq r \leq 2$, e portanto $\cos u \geq 1/2$ o que dá $u \leq \pi/3$. Como $\operatorname{sen}u \geq 0$

nesta região (na verdade, em todo o domínio $0 \le u \le \pi$ da mudança de coordenadas) as desigualdades seguintes implicam $0 \le v \le \pi/2$. Assim, ficamos com

$$\int_{v=0}^{\pi/2}\int_{u=0}^{\pi/3}\int_{r=\frac{1}{\cos u}}^{2} \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \operatorname{sen} u \, dr du dv.$$

A integral em v dá $\frac{\pi}{2}$. A integral restante dá:

$$\int_0^{\pi/3}\left(\int_{1/\cos u}^{2} r^2\,dr\right)\operatorname{sen} u\,du$$

Resolvendo a interna:

$$\int_0^{\pi/3}\frac{8-(\cos u)^{-3}}{3}\operatorname{sen} u\,du \qquad \text{tomando } y=\cos u:$$

$$=\int_1^{1/2}\frac{8-y^{-3}}{3}\,d(-y) \qquad \text{trocando a ordem e sinal:}$$

$$=\int_{1/2}^{1}\frac{8-y^{-3}}{3}\,dy = \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} y^{-3}\,dy \;=\; \frac{4}{3}-\frac{1}{2} \;=\; \frac{5}{6},$$

onde a última integral pode ser calculada usando $z = 1/y$ ou diretamente. Juntando tudo:

$$V = \frac{5\pi}{12\sqrt{6}}$$

Questão 3: (2 pontos)

Calcular a integral de linha da função escalar

$$\int_\gamma \sqrt{4-3x^2-3y^2}\,ds,$$

onde γ é a curva definida pela equação polar $r = \operatorname{sen}(2\theta)$ e situada no primeiro quadrante.

Solução:

Ao longo a curva γ, temos

$$\sqrt{4-3x^2-3y^2} = \sqrt{4-3r^2} = \sqrt{4-3\operatorname{sen}^2(2\theta)},$$

e a parametrização

$$\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}(2t)\cos(t), \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(t))$$

com $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ tem

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(2t)+4\cos^2(2t)} = \sqrt{4-3\operatorname{sen}^2(2t)},$$

então

$$\int_\gamma \sqrt{4-3x^2-3y^2}\,ds \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-3\operatorname{sen}^2(2t))\,dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos(4t)\right)dt \;=\; \frac{5\pi}{4}.$$

Questão 4: (2 pontos)

Use o teorema de Green para calcular a integral de linha da função vetorial

$$\int_C (e^{x^3} + y^2)\, dx + (x + y^5)\, dy,$$

onde C é o bordo da região delimitada por $x = y^2 + 1$ e $x = 5$, orientado no sentido anti-horário.

Solução:

Temos $F = (P, Q) = (e^{x^3} + y^2, x + y^5)$, uma função diferenciável com derivada contínua (C^1) no aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, contendo D e sua fronteira C está orientada positivamente. Logo aplicando o teorema de Green, obtemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D (1 - 2y)\, dx\, dy.$$

Descrevendo D como uma região tipo II, obtemos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq y \leq 2, y^2 + 1 \leq x \leq 5\}.$$

Então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{2} \int_{y^2+1}^{5} (1 - 2y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \Big[x - 2xy \Big]_{y^2+1}^{5} dy = \int_{-2}^{2} (2y^3 - y^2 - 8y + 4)\, dy =$$

$$= \left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} - 4y^2 + 4y \right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Outra Solução fazendo D uma região tipo I:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 5, -\sqrt{x-1} \leq x \leq \sqrt{x-1}\}.$$

Então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^5 \int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} (1 - 2y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_1^5 \Big[y \Big]_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^5 2\sqrt{x-1}\, dx =$$

$$= \left[\frac{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^5 = \frac{32}{3}.$$

Questão 5: (2 pontos)

(a) Encontre constantes α e β tais que a integral

$$\int_C (\alpha y^2 - xy)\, dx + (\beta x^2 - 4xy)\, dy$$

não dependa do caminho de integração.

(b) Para os valores de α e β encontrados acima, calcule a integral do item (a) onde C é o semi-círculo $x^2 + y^2 = 1$ com $y \geq 0$, orientada no sentido horário.

Solução:

(a) Precisamos encontrar constantes α e β, de tal forma que o campo $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (\alpha y^2 - xy, \beta x^2 - 4xy)$ seja conservativo. Em outras palavras, precisamos que $2\alpha y - x = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2\beta x - 4y$. Assim, concluímos que $2\beta = -1$ or $2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$ e $\beta = -\frac{1}{2}$.

(b) Para $\alpha = -2$ e $\beta = -\frac{1}{2}$ o campo F é um campo conservativo, por tanto somente estamos interessados numa curva que liga os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$. Podemos então colocar a parametrização $\alpha(t) = (t,0)$ para $t \in [-1,1]$. Logo

$$\int_C (-2y^2 - xy)dx + (-\frac{1}{2}x^2 - 4xy)dy = \int_{-1}^{1} (-2 \cdot 0^2 - t \cdot 0)dt = 0.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.