TEMPO DE PROVA: 2,5 horas

Questão 1: (3 pontos)

Considere a parte Σ do parabolóide hiperbólico $4x^2 + 4y - 4z^2 = 1$ onde $x^2 - y + 3z^2 \leq 0$.

(i) Determine uma parametrização da superfície Σ, especificando o domínio de definição.

(ii) Usando a parametrização, calcule a integral de superfície da função escalar

$$\iint_\Sigma \sqrt{2x^2 + y}\, dS.$$

Solução:

(i) A superfície S é uma parte do gráfico $y = f(x, z)$ da função $f(x, z) = \frac{1}{4} - x^2 + z^2$ sobre o disco D com raio $\frac{\sqrt{2}}{4}$ no plano $y = 0$. Então podemos parametrizar S com $r(x, z) = (x, \frac{1}{4} - x^2 + z^2, z)$.

(ii) Temos $dS = |r_x \times r_z|\, dxdz = \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}\, dxdz$, e na superfície Σ,

$$\sqrt{2x^2 + y}\, dS = \sqrt{x^2 + z^2 + \frac{1}{4}}\, \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}\, dxdz = (2x^2 + 2z^2 + \frac{1}{2})\, dA,$$

logo a integral é

$$\iint_S \sqrt{2x^2 + y}\, dS = 2\iint_D (x^2 + z^2) dA \;+\; \frac{1}{2}\iint_D dA,$$

que em coordinadas polares é

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} r^3\, drd\theta \;+\; \frac{\pi}{16} \;=\; \frac{\pi}{2^6} + \frac{\pi}{2^4}.$$

Questão 2: (3 pontos)

Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{x^2+y^2} - e^x \cos y,\ \frac{y}{x^2+y^2} + e^x \operatorname{sen} y,\ z^2)$. Mostre que

$$\oint_C \vec{F} \cdot dr = 0,$$

com C uma curva fechada dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com um gráfico $z = f(x, y)$ de uma função $f(x, y)$ positiva e diferenciável sobre o plano-xy.

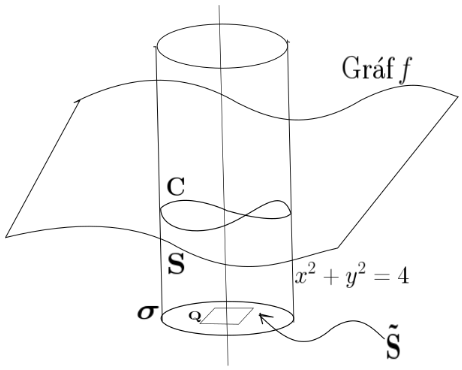
(**Dica:** Use Stokes duas vezes com as superfícies apropriadas.)

Solução:

Consideremos a superfície

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Vamos supor que a curva C está orientada em sentido anti-horário, então colocando a orientação com normal exterior para S. Claramente $\partial S = C^- \cup \sigma$, onde $\sigma = \{x^2 + y^2 = 4\}$. Ver figura abaixo.



Note que o rot$F = 0$, então pela Teorema de Stokes, temos que

$$\int_{C^- \cup \sigma} F \cdot dr = 0 \implies \oint_C F \cdot dr = \oint_\sigma F \cdot dr.$$

Para calcular a última integral, vamos de novo, usar o Teorema de Stokes na superfície

$$\tilde{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; \quad |x| \geq 1; \quad |y| \geq 1\}.$$

Em outras palavras, $\tilde{S}$ é o complementar no disco $x^2 + y^2 \leq 4$ do quadrado Q de lado 2 e centro $(0, 0)$. Novamente, considerando esta superfície com vetor normal $(0, 0, 1)$ e levando em consideração que rot $F = 0$, temos que

$$\oint_\sigma F \cdot dr = \oint_Q F \cdot dr,$$

onde Q está orientado sentido anti-horário. Parametrizemos o quadrado Q da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll} \gamma_1(t) = (t, -1, 0); & t \in [-1, 1], & \gamma_2(t) = (1, t, 0); & t \in [-1, 1] \\ \gamma_3(t) = (-t, 1, 0); & t \in [-1, 1], & \gamma_4(t) = (-1, -t, 0); & t \in [-1, 1]. \end{array}$$

Calculando cada integral de linha, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} F \cdot dr &= \int_{-1}^{1} e^t \cos(-1) dt + \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + 1} dt = \cos(1)(e^1 - e^{-1}); \\ \int_{\gamma_3} F \cdot dr &= \int_{-1}^{1} e^{-t} \cos(1)(-1) dt + \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + 1}(-1) = -\cos(1)(e^1 - e^{-1}) dt; \\ \int_{\gamma_1} F \cdot dr &= \int_{-1}^{1} e^1 \mathrm{sen}\,(t) dt + \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + 1} dt = 0; \\ \int_{\gamma_1} F \cdot dr &= \int_{-1}^{1} e^{-1} \mathrm{sen}\,(-t) dt + \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + 1} dt = 0. \end{aligned}$$

Solução:

Somando as quatro últimas integrais obtemos que $\oint_Q F \cdot dr = 0$. O que permite concluir que

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_\sigma F \cdot dr = \oint_Q F \cdot dr = 0.$$

Questão 3: (4 pontos)

Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, z)$ no sólido W limitado por $z = 2(x^2 + y^2)$ e $z = 8$.

(i) Parametrize as duas partes das superfícies que delimitam este sólido.

(ii) Usando as parameterizações do item anterior, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através ∂W (isto é, calcule *sem* usar o Teorema de Gauss).

(iii) Calcule o divergente do campo $\vec{F}$ e use o Teorema de Gauss para verificar o resultado do item anterior (isto é, calcule novamente o fluxo usando o Teorema de Gauss).

Solução:

$(i,\ ii)$ Temos que $\partial W = S_1 \cup S_2$, orientada positivamente.

Daí, $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1} \mathrm{d}S + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2} \mathrm{d}S$.

1. $S_1 : z = 8 = f(x, y), (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$, vetor normal $\vec{n_1} = \vec{k}$ e $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 0 + 0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Assim,

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1} \mathrm{d}S = \iint_D (2x, 2y, 8) \cdot (0, 0, 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 8A(D) = 32\pi.$$

2. $S_2 : z = 2(x^2 + y^2) = g(x, y), (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Um vetor normal apontando para cima em S_2 é dado por $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1) = (-4x, -4y, 1)$. Logo, um vetor normal unitário a S_2 apontando para baixo é dado por

$$\vec{n_2} \frac{4x, 4y, -1}{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}.$$

Tem-se $\mathrm{d}S = \|\vec{N}\| = \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Daí,

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2} \mathrm{d}S = \iint_D (2x, 2y, 2(x^2 + y^2)) \cdot (4x, 4y, -1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$\iint_D 8x^2 + 8y^2 - 2x^2 - 2y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6 \iint_D x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2} \mathrm{d}S = 6 \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 6 \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 12\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 48\pi.$$

Portanto,

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1} \mathrm{d}S + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n_2} \mathrm{d}S = 32\pi + 48\pi = 80\pi.$$

(iii) Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\iiint_W div\vec{F}\mathrm{d}V &= 5\iiint_W 2+2+1\mathrm{d}V = 5\iint_D \int_{2(x^2+y^2)}^{8} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 5\iint_D (8-2x^2-2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 5\iint_{D_{r\theta}} (8-2r^2)r \cdot r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 5\int_0^2 (8r-r^3)\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 10\pi\left[4r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^2 = 10\pi \cdot 8 = 80\pi.
\end{aligned}$$