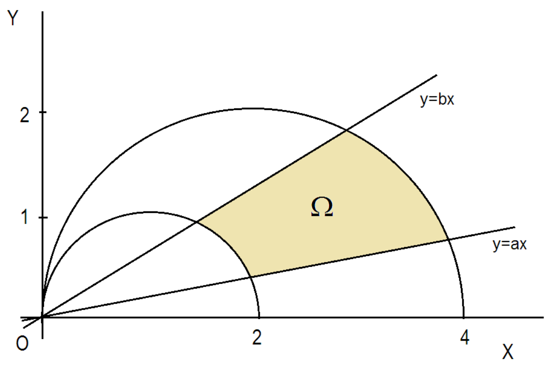
Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Prova Final - 29/11/2018

TEMPO DE PROVA: 2,5 horas

Questão 1: (2.5 pontos)

Sejam $0 < a < b < 1$ dois números reais positivos. Calcule a integral dupla $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{x}\, dA$, onde

$$\Omega = \{(x, y) \mid ax \le y \le bx,\ 2x \le x^2 + y^2 \le 4x\}.$$



Solução:

$$\begin{cases} x = r\cos t, & 2\cos t < r < 4\cos t \\ y = r\sin t, & \arctan(a) < t < \arctan(b) \end{cases} \qquad J(r,t) = r$$

$$\iint_{\Omega} \tfrac{1}{r\cos t} |J(r,t)| dr dt = \int_{\arctan a}^{\arctan b} \tfrac{1}{\cos t} \int_{2\cos t}^{4\cos t} dr dt = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral tripla $\iiint\limits_{D} z\, dV$, onde

$$D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z,\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 \le 1\}.$$

Solução:

Em coordenadas esfericas (ρ, ϕ, θ), a esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ tem a forma $\rho = 2\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta$ com $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \phi \le \pi$, e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a forma $\phi = \frac{\pi}{4}$, logo

$$D = \{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \rho \le 2\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta\},$$

então pelo Fubini

$$\iiint\limits_{D} z\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\,sen\phi\,sen\theta} \rho^3 \cos\phi\,\text{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 4\,(\int_0^{\pi} \text{sen}^4\theta\ d\theta)\,(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\text{sen}^5\phi}_{u^5}\ \underbrace{\cos\phi\ d\theta}_{du}),$$

e escrevendo

$$\text{sen}^4\theta = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta),$$

temos

$$\iiint_D z\,dV \;=\; \frac{3\pi}{2}\,\frac{1}{6\cdot 8} \;=\; \frac{\pi}{32}.$$

Solução alternativa: Em coordinadas cilídricas (r,θ,z), o hemisfério superior $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ com $z\geq 0$ tem a forma $z=\sqrt{2\,r\,\mathrm{sen}\theta - r^2}$ com $0\leq\theta\leq\pi$ e $0\leq r\leq \mathrm{sen}\theta$, e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a forma $z=r$, então pelo Fubini

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta}\int_r^{\sqrt{2\,r\,sen\theta-r^2}} r\,z\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta}(r^2 sen\theta - r^3)\,dr\,d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4\theta\,d\theta,$$

e escrevendo de novo

$$\mathrm{sen}^4\theta = \frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)^2 = \frac{1}{4}(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta),$$

temos

$$\iiint_D z\,dV \;=\; \frac{1}{12}\,\frac{3\pi}{8} \;=\; \frac{\pi}{32}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o campo $\vec{F} = (2x(y+1),\, x^2+3y^2+2y+z^2,\, 2z(y+1))$.

(i) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

(ii) Determine um potencial f para $\vec{F}$ (isto é, uma função escalar tal que $\vec{F}=\nabla f$).

(iii) Encontre o ponto Q na esfera $x^2+y^2+z^2=1$ tal que a integral de linha do campo $\vec{F}$ sobre qualquer caminho γ ligando a origem $P=(0,0,0)$ a Q satisfaz

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Solução:

(i) O campo $\vec{F}$ não tem singularidades, e $\nabla\times\vec{F} = (2z-2z, 0-0, 2x-2x) = 0$.

(ii) Resolver o sistema $f_x = 2xy+2x$, $f_y = x^2+3y^2+2y+z^2$, $f_z = 2yz+2z$:

$$f(x,y,z) = x^2y + y^3 + z^2y + x^2 + y^2 + z^2$$

(iii) Podemos re-escrever o potencial

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2y+y^3+z^2y+x^2+y^2+z^2 \\ &= y(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2) \\ &= (y+1)(x^2+y^2+z^2). \end{aligned}$$

Nesse caso, $f(P)=0$, então para qualquer curva com $\partial\gamma = \{P,Q\}$,

$$\int_C F\cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P) = f(Q),$$

Portanto, o problema se resume a encontrar um ponto Q na esfera onde $f(Q) = 0$, e como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ na esfera, basta encontra um ponto onde $y + 1 = 0$. A única possibilidade é $Q = (0, -1, 0)$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere uma esfera E e um paralelepípedo sólido P definidos por

$$E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}, \quad P = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 3, |z| \leq 5\}.$$

(i) Dê uma parametrização da superfície $S = E \cap P$, orientada com vetor normal apontando para a origem.

(ii) Dê ***duas*** expressões que permitam calcular o fluxo do campo $\vec{F} = (x, -2y, z)$ através de S, uma na parametrização acima, e a outra usando o Teorema de Gauss.

(iii) Escolha uma destas duas expressões e calcule o fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Solução:

1. Como os pontos estão sobre uma esfera de raio dois, tomamos $x = 2\cos(\phi)$, $y = 2\sin(\phi)\cos(\theta)$, $z = 2\sin(\phi)\sin(\theta)$, com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. As restrições em y e z impostas pelo paralelepípedo não alteram a região. Para $-1 \leq 2\cos(\phi) = x \leq 1$, obtemos $-1/2 \leq \cos(\phi) \leq 1/2$. Como $0 \leq \phi \leq \pi$, isto dá $\phi \in [\pi/3, 2\pi/3]$.

   Os vetores tangentes são

$$\begin{array}{l}\Big(\quad 0 \quad , -2\sin(\phi)\sin(\theta),\ 2\sin(\phi)\cos(\theta)\Big) \\ \Big(-2\sin(\phi),\ 2\cos(\phi)\cos(\theta)\ ,\ 2\cos(\phi)\sin(\theta)\Big)\end{array}$$

   Daí, o vetor normal será:

$$\begin{aligned} n &= -\Big(4\cos(\phi)\sin(\phi), 4\sin^2(\phi)\cos(\theta), 4\sin^2(\phi)\sin(\theta)\Big) \\ &= -2\sin(\phi)\Big(x, y, z\Big). \end{aligned}$$

   Como $\sin(\phi) > 0$ no domínio da parametrização, este vetor aponta para a origem, partindo do ponto (x, y, z).

2. Pela parametrização, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x, -2y, z) \cdot n \, dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \Big(2\cos(\phi), -4\sin(\phi)\cos(\theta), 2\sin(\phi)\sin(\theta)\Big) \cdot \\ &\qquad \Big(-4\cos(\phi)\sin(\phi), -4\sin^2(\phi)\cos(\theta), -4\sin^2(\phi)\sin(\theta)\Big)\, d\phi d\theta \end{aligned}$$

Para usar o teorema de Gauss, primeiro calculamos $divF = 1 - 2 + 1 = 0$. Consideramos agora o volume $B \cap P$ onde $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. O bordo de B é composto pela superfície S e os dois discos $D_1 = \{x = 1, y^2 + z^2 \leq 3\}$ e $D_2 = \{x = -1, y^2 + z^2 \leq 3\}$. Assim, pelo teorema de Gauss:

$$0 = I + \iint_{D_1} F \cdot ndS + \iint_{D_2} F \cdot ndS.$$

3. Usando a primeira integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} -8\cos^2(\phi)\sin(\phi) + 16\sin^3(\phi)\cos^2(\theta) - 8\sin^3(\phi)\sin^2(\theta)\, d\phi d\theta.$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = \pi$, fazendo primeiro a integral em θ obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} -8\cos^2(\phi)\sin(\phi)\cdot(2\pi) + 16\sin^3(\phi)\pi - 8\sin^3(\phi)\pi\, d\phi \\ &= -8\pi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 2\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi)\, d\phi. \end{aligned}$$

Substituindo $u = \cos(\phi)$:

$$\begin{aligned} I &= -8\pi \int_{1/2}^{-1/2} 2u^2 - (1 - u^2)\,(-du) \\ &= -8\pi \int_{-1/2}^{1/2} 3u^2 - 1\,(du) \\ &= -8\pi \Big[u^3 - u\Big]_{-1/2}^{1/2} = 6\pi. \end{aligned}$$

Usando a segunda integral: O vetor normal unitário aos discos D_1 e D_2 é $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, respectivamente, para respeitar a orientação de ser a normal *interior* ao volume B, como era para a superfície S. Logo:

$$\begin{aligned} -I &= \iint_{D_1} (x, -2y, z)\cdot(-1, 0, 0)dS + \iint_{D_2} (x, -2y, z)\cdot(1, 0, 0)dS \\ &= \iint_{D_1} (-1)dS + \iint_{D_2} (-1)dS = -6\pi. \end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.