



Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2017/2, 26/09/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

- (a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série abaixo
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^3}{n!}.$$

**Solução:** O termo  $a_n = \frac{(-2)^n n^3}{n!}$  satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{1}{n+1} = 0 (< 1),$$

então, pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente.

- (b) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

**Solução**

Sendo  $a_n = \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ , aplicamos o teste de razão. Teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -3(x-1) \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3|x-1|,$$

o qual é menor do que 1 se  $|x-1| < 1/3$ . Logo o raio de convergência da série é  $1/3$

Para determinar o intervalo de convergência, precisaremos verificar o que acontece com a série nos pontos extremos  $x-1 = -(1/3)$  e  $x-1 = 1/3$ .

Se  $x-1 = -(1/3)$ , então  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . Logo (a menos de um deslocamento) a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é uma  $p$ -série para  $p = 1/2$ . Portanto a série é divergente.

Se  $x-1 = (1/3)$ , então  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  e a série é alternada, agora definamos  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , então  $b_n$  é uma sequência decrescente com limite zero, assim o teste de convergência para séries alternadas determina que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

Conclusão: O intervalo de convergência é:  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ .

- (c) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  é convergente ou divergente? Justifique.

**Solução**

Seja  $b_n = 1/n$  e  $a_n = (n^{1+\frac{1}{n}})^{-1}$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ , como pode ser visto usando a regra de l'Hôpital. Então pelo teste de comparação no limite, podemos concluir que como a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, então a série  $\sum a_n$  também diverge.

**Questão 2:** (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial  $xy'' + (1-x)y' + cy = 0$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante.

(a) Mostre que  $x = 0$  é um ponto singular regular (justifique sua resposta).

**Solução**

Reescrevendo a equação na forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0,$$

identificamos  $p(x) = (1-x)$  e  $q(x) = cx$ , analíticas em  $x = 0$ , logo  $x = 0$  é ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência associada.

**Solução**

A equação indicial está definida por

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0,$$

onde  $p_0 = p(0) = 1$  e  $q_0 = q(0) = 0$ . Portanto a equação indicial está definida por  $F(r) = r^2$ . As raízes dessa equação são  $r_1 = r_2 = 0$ . Para a equação de recorrência usamos a raiz  $r_1 = 0$  para definir a solução em séries:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Substituindo na equação

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Uniformizando índices e potências obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+1)n + a_{n+1}(n+1) - a_n n + ca_n] x^n = 0,$$

de onde deduzimos a relação de recorrência

$$a_{n+1} = \frac{n-c}{(n+1)^2} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(c) Supondo que  $c = m \in \mathbb{Z}^+$  (inteiro positivo), mostre que existe uma solução do que se reduz a um polinômio. Especifique qual é o grau desse polinômio.

**Solução**

Da relação de recorrência do item anterior temos que, para  $c = m$ :

$$a_{n+1} = \frac{n-m}{(n+1)^2} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde o termo geral sempre depende do termo anterior. Além disso, note que o termo  $a_{m+1}$  tem por equação

$$a_{m+1} = \frac{m-m}{(m+1)^2} a_m = 0.$$

Logo os termos seguintes  $a_{m+k} = 0$  para todo  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Portanto a solução se reduz ao sumatório

$$y(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n, \quad \text{polinômio de grau } m.$$

**Questão 3:** (2,5 pontos) Encontre todos os valores não nulos de  $\theta$  para os quais todas as soluções de

$$\theta x^2 y'' - x y' = 0$$

têm limite finito quando  $x$  tende a zero.

**Solução:**

Observemos que estamos procurando valores não nulos de  $\theta$ , então dividindo por  $\theta$  a equação anterior, temos

$$x^2 y'' - \frac{1}{\theta} x y' = 0.$$

Esta última equação é uma equação de Euler, com equação de segundo grau

$$r(r-1) - \frac{1}{\theta} r = r^2 - \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) r = 0.$$

A equação quadrática anterior tem duas raízes reais  $r_1 = 0$  e  $r_2 = 1 + \frac{1}{\theta}$ . Vamos destacar três casos:

Caso 1:  $\theta = -1$ . Neste caso  $r_1 = r_2 = 0$  e a solução geral da equação de Euler é

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln|x| \quad \text{com } C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Por tanto, tomando  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 1$ , temos uma solução  $y(x) = \ln|x|$  a qual não têm limite finito quando  $x$  tende a zero, assim o valor de  $\theta = -1$  é desconsiderado.

Caso 2:  $1 + \frac{1}{\theta} < 0 \iff -1 < \theta < 0$ . Neste caso  $r_1 = 0$  e  $r_2 < 0$  e a solução geral da equação de Euler é da forma

$$y(x) = C_1 + C_2 |x|^{1+\frac{1}{\theta}} \quad \text{com } C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Claramente, tomando  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 1$ , temos uma solução  $y(x) = |x|^{1+\frac{1}{\theta}}$  a qual não têm limite finito quando  $x$  tende a zero (pois  $1 + \frac{1}{\theta} < 0$ ), assim os valores

$-1 < \theta < 0$  são desconsiderados.

Caso 3:  $1 + \frac{1}{\theta} > 0 \iff -\infty < \theta < -1$  ou  $0 < \theta < +\infty$ . Neste caso  $r = 0$  e  $r_2 > 0$  e a solução geral da equação de Euler é da forma

$$y(x) = C_1 + C_2|x|^{1+\frac{1}{\theta}} \text{ com } C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Logo, como  $r_2 = 1 + \frac{1}{\theta} > 0$ , então para quaisquer constantes  $C_1$  e  $C_2$ , temos que  $y(x)$  têm limite finito quando  $x$  tende a zero.

Podemos concluir então que os valores de  $\theta$  que respondem a questão estão no conjunto

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

**Question 4:** (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \text{sen}(t)u_{\frac{\pi}{2}}(t) + \cos(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde  $u_{\frac{\pi}{2}}(t)$  é a função degrau unitário com descontinuidade em  $\frac{\pi}{2}$ .

**Solução**

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos lados da equação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) + 4y'(t) + 5y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t) \sin(t) + \cos(t)\}(s), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t) \sin(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que das condições iniciais obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 1, \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\{y(t)\}(s). \end{aligned}$$

Além disso sabemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t) \sin(t)\}(s) &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\{\sin(t + \frac{\pi}{2})\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} \right], \\ \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) &= \frac{s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Logo substituindo na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 4s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 1 &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} \right] + \frac{s}{s^2 + 1}, \\ (s^2 + 4s + 5)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= e^{-\frac{\pi}{2}s} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} \right] + \frac{s}{s^2 + 1} + 1, \end{aligned}$$

Além disso, note que  $s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1$ , logo

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \left[ \frac{s}{(s^2 + 1)((s + 2)^2 + 1)} \right] + \frac{s}{(s^2 + 1)((s + 2)^2 + 1)} + \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}.$$

Definamos

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)((s + 2)^2 + 1)}$$

e lembremos que  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(t)\}(s) = \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}$ , assim a equação anterior fica

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(t)\}(s).$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)h\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}(s) + \mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(t)\}(s).$$

Portanto a solução é

$$y(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)h\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + h(t) + e^{-2t} \sin(t). \quad (1)$$

então somente falta determinar  $h(t)$ . De fato, usando frações parciais, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h(t)\}(s) &= \frac{s}{(s^2 + 1)((s + 2)^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{s + 1}{s^2 + 1} - \left\{ \frac{s + 5}{(s + 2)^2 + 1} \right\} \right], \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} - \left\{ \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{3}{(s + 2)^2 + 1} \right\} \right], \\ &= \frac{1}{8} \left[ \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(t)\}(s) - 3\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(t)\}(s) \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$h(t) = \frac{1}{8} (\cos(t) + \sin(t) - e^{-2t} \cos(t) - 3e^{-2t} \sin(t)). \quad (2)$$

finalmente substituindo (2) em (1) obtemos a solução

$$\begin{aligned} y(t) &= u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left\{ \frac{1}{8} (\sin(t) - \cos(t) - e^{\pi-2t} \sin(t) + 3e^{\pi-2t} \cos(t)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{8} (\cos(t) + \sin(t) - e^{-2t} \cos(t) - 3e^{-2t} \sin(t)) \\ &\quad + e^{-2t} \sin(t). \end{aligned}$$

**Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.**

**FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!**

### Transformadas de Laplace elementares.

$f$	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^m (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$t^m e^{at} (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$e^{at}\text{cos}(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$