UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo IV - 2017/2 - 14/11/2017

Questão 1: (2.5 pontos) Seja $f(x) := \text{sen}(\pi x/2)$ para $x \in [0,1]$.

(a) Calcule a série de Fourier em senos da função $f(x)$.

Solução

Temos $L = 1$, e podemos calcular os coeficientes com a fórmula

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\cdot \text{sen}(\pi x/2)dx \\ &= 2\int_0^1 \cos((n-1/2)\pi x)/2 - \cos((n+1/2)\pi x)/2dx \\ &= \left[\frac{\text{sen}((n-1/2)\pi x)}{(n-1/2)\pi} - \frac{\text{sen}((n+1/2)\pi x)}{(n+1/2)\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{-(-1)^n}{(n-1/2)\pi} - \frac{(-1)^n}{(n+1/2)\pi} \\ &= (-1)^{n+1}\cdot\frac{n-1/2+(n+1/2)}{(n^2-1/4)\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{(n^2-1/4)\pi}. \end{aligned}$$

A série então é

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{(n^2-1/4)\pi}\text{sen}(n\pi x).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-3,3]$.

Solução

Pelo teorema de convergência de Fourier a função para a qual ela converge è periódica de período 2, ímpar, e igual à media entre $f(x^-)$ e $f(x^+)$.

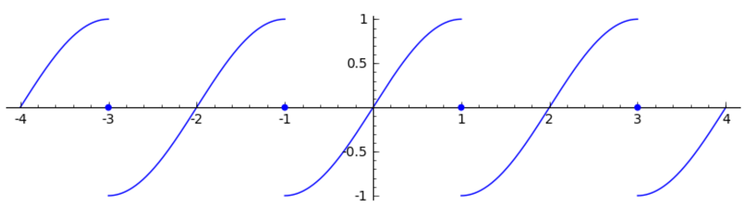

Figura 1: Figura

(c) Calcule o valor limite da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(1+2k)}{(1+2k)^2-1/4}$.

Solução

Para $x = 1/2$ temos que a série de Fourier é exatamente a série que estamos tentando calcular dividida por π, então o valor limite vai ser igual a

$$\pi f(1/2) = \pi \text{sen}(\pi/4) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 2: (2,5 pontos) Encontre todos os valores de λ para os quais existem soluções não triviais da seguinte equação de Euler com condições de contorno.

$$\begin{cases} x^2 y'' + \frac{\lambda}{4} y = 0, \\ y(1) = 0, \ y(4) = 0. \end{cases}$$

Quais são as soluções não triviais?

Solução

Procuramos soluções da forma $y = x^r$. Derivando y temos

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Substituindo na equação obtemos as relações

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + \frac{\lambda}{4}x^r = 0 \Leftrightarrow (r^2 - r + \frac{\lambda}{4})x^r = 0 \Leftrightarrow r^2 - r + \frac{\lambda}{4} = 0,$$

logo obtemos as raizes

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-\lambda}}{2}$$

Há três possibilidades:

(a) $\lambda = 1$. Neste caso temos uma raíz $r = 1/2$, a solução geral é dada pela expressão

$$y(x) = ax^{1/2} + bx^{1/2}\ln(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

As condições de contorno impõem as igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = a + b\ln(1) \Rightarrow a = 0, \\ 0 &= y(4) = 2\,b\ln(4) \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

logo $a = b = 0$. Portanto, que não há soluções não-triviais e 0 não é autovalor.

(b) $\lambda < 1$. Neste caso temos duas raízes reais diferentes

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1-\lambda}}{2},$$

a solução geral é dada pela expressão

$$y(x) = ax^{r_1} + bx^{r_2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

As condições de contorno impõem as igualdades

$$0 = y(1) = a + b,$$
$$0 = y(4) = a4^{r_1} + b4^{r_2}$$

de onde temos que $b = -a$ e

$$a\left(4^{r_1} - 4^{r_2}\right) = 0 \Rightarrow a = 0$$

logo $a = b = 0$. Portanto, que não há soluções não-triviais e 0 não é autovalor.

(c) $\lambda > 1$. Neste caso temos duas raízes complexas

$$r_1 = \frac{1 - i\sqrt{\lambda - 1}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 + i\sqrt{\lambda - 1}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2},$$

a solução geral é dada pela expressão

$$y(x) = ax^{1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2}\ln(x)\right) + bx^{1/2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2}\ln(x)\right), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

As condições de contorno impõem as igualdades

$$0 = y(1) = a,$$
$$0 = y(4) = 2\,b\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2}\ln(4)\right)$$

Portanto, existem soluções não-triviais se, e somente se,

$$\frac{\sqrt{\lambda - 1}}{2}\ln(4) = n\pi,$$

por n inteiro positivo. Assim, as autovalores são

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ln(4)}\right)^2 + 1,$$

e as autofunções correspondentes são dadas por

$$y_n(x) = x^{1/2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(4)}\ln(x)\right).$$

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre a solução u do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = u(x, y),\ (x, y) \in (0, 4) \times (-2, 2), \\ u(x, -2) = u(x, 2) = g(x),\ x \in [0, 4], \\ u(0, y) = u(4, y) = 0,\ y \in [-2, 2], \end{cases}$$

onde $g:[0,4]\to\mathbb{R}$ é a função definida por

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\le x<1,\\ 4 & \text{se } 1\le x<3,\\ 0 & \text{se } 3\le x\le 4.\end{cases}$$

Solução

Primeiramente, procuramos soluções fundamentais da eq. (EQ) e a condição de contorno[1] homogênea (CC_x : Condição de Contorno em x) com variáveis separadas:

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

Substituindo na (EQ) obtemos

$$\frac{X''}{X}(x)=(1-\frac{Y''}{Y})(y)=\lambda\in\mathbb{R}\ cte$$

Substituindo nas c.c. homogêneas (CC_x) obtemos $X(0)=X(4)=0$. Logo, será suficiente resolver

$$(*1)\ \ X''-\lambda X=0,\ X(0)=X(4)=0,$$

$$(*2)\ \ Y''-(1-\lambda)Y=0.$$

Notemos que (*1) é um problema de autovalores, só tem solução não trivial para

$$\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{4^2},\ n=1,2,...\in\mathbb{N}$$

e, para cada n, a solução deve ser um múltiplo de

$$X_n(x)=sen(\frac{n\pi}{4}x).$$

Com estes valores de λ, a eq. (*2) fica

$$Y''-\underbrace{(1+\frac{n^2\pi^2}{4^2})}_{\rho_n}Y=0,$$

onde $\rho_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. A solução geral de (*2) é combinação linear das funções

$$Y_n(y)\in\{e^{\mu_n y},e^{-\mu_n y}\}\ com\ \ \mu_n=\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{4^2}},\ n\in\mathbb{N}.$$

[1]Alternativamente, pode se procurar soluções fundamentais da (EQ) junto com (CC_x) **e** $u(x,-2)=u(x,2)\forall x\in[0,4]$. Notar que esta ultima condição também é de natureza *homogênea*. Uma vez achado este conjunto de sol. fund., só resta propor uma superposição para ajustar a condição restante: $u(x,2)=g(x)\forall x\in[0,4]$.

Concluímos que, tomando $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$, obtemos o seguinte conjunto de soluções fundamentais da (EQ) com (CC_x):

$$\{e^{\mu_n y} sen(\frac{n\pi}{4}x), e^{-\mu_n y} sen(\frac{n\pi}{4}x); n \in \mathbb{N}\}.$$

Para achar a solução do problema completo, propomos uma 'superposição de soluções fundamentais':

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} c_n e^{\mu_n y} sen(\frac{n\pi}{4}x) + k_n e^{-\mu_n y} sen(\frac{n\pi}{4}x)$$

com coeficientes $c_n, k_n \in \mathbb{R}$ a determinar pela (CC_y).

Para isto, consideramos a serie de Fourier de senos de g (estendendo g como função impar para $[-4,4]$):

$$S[g](x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n sen(\frac{n\pi}{4}x).$$

A (CC_y) será satisfeita (nos pontos de continuidade da g) se pedimos que os coeficientes desta série de Fourier de senos coincidam com aqueles das funções $x \mapsto u(x,-2)$ e $x \mapsto u(x,2)$. Chegamos então às seguintes eqs. para c_n, k_n em termos de α_n:

$$c_n e^{-2\mu_n} + k_n e^{2\mu_n} = \alpha_n,$$

$$c_n e^{2\mu_n} + k_n e^{-2\mu_n} = \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $e^{4\mu_n} \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$c_n = k_n = \frac{\alpha_n}{e^{-2\mu_n} + e^{2\mu_n}} = \frac{2\alpha_n}{cosh(2\mu_n)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Só resta calcular os coeficientes de Fourier α_n de g. Pela expressão geral eles estão dados por:

$$\alpha_n = \frac{2}{4}\int_0^4 g(x) sen(\frac{n\pi}{4}x)dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

O resultado destas integrais é:

$$\alpha_n = \frac{8}{n\pi}(cos(\frac{n\pi}{4}) - cos(\frac{3n\pi}{4})), \ n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando a **fórmula útil** $cos(a-b) - cos(a+b) = 2sen(a)sen(b)$, podemos simplificar a expressão anterior para:

$$\alpha_n = \frac{16}{n\pi} sen(\frac{n\pi}{4}) sen(\frac{n\pi}{2}).$$

A expressão acima é zero se n é par e, para $n = 2k + 1$ ímpar com $k = 0, 1, 2, ..,$ temos

$$\alpha_{2k+1} = \frac{16}{(2k+1)\pi}(-1)^k sen(\frac{2k+1}{4}\pi).$$

Portanto, a solução procurada $u(x, y)$ do problema completo é

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{8}{n\pi}(cos(\frac{n\pi}{4}) - cos(\frac{3n\pi}{4}))}{e^{-\mu_n 2} + e^{\mu_n 2}}(e^{-\mu_n y} + e^{\mu_n y})sen(\frac{n\pi}{4}x)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{16}{(2k+1)\pi} \frac{(-1)^k sen(\frac{2k+1}{4}\pi)}{e^{-2\mu_{2k+1}} + e^{2\mu_{2k+1}}}(e^{\mu_{2k+1}y} + e^{-\mu_{2k+1}y})sen(\frac{(2k+1)\pi}{4}x)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{16}{(2k+1)\pi} \frac{(-1)^k sen(\frac{2k+1}{4}\pi)}{cosh(2\mu_{2k+1})} cosh(\mu_{2k+1}y)sen(\frac{(2k+1)\pi}{4}x).$$

Question 4: (2.5 pontos)
Encontre todas as soluções u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_y = 2(x + y)u, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Solução: Fazendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, temos que a equação diferencial parcial do problema fica

$$\begin{aligned} X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) &= 2(x+y)X(x)Y(y) \\ \frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} &= 2x + 2y \\ \frac{X'(x)}{X(x)} - 2x &= 2y - \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \Leftarrow \text{separação de variáveis.} \end{aligned}$$

Obtemos por tanto as equações

$$X'(x) = (2x + \lambda)X(x) \ \text{ e } \ Y'(y) = (2y - \lambda)Y(y).$$

Usando a formula útil D (do verso da prova), podemos concluir que

$$X(x) = C_1 e^{x^2+\lambda x} \ \text{ e } \ Y(y) = C_2 e^{y^2-\lambda y},$$

assim todas as soluções da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ são

$$u(x, y) = ke^{x^2+y^2+\lambda(x-y)},$$

onde k é uma constante.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

ALGUMAS FORMULAS ÚTEIS

A. $\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$.

B. Se r_1, r_2 são as raizes da equação indicial associada a equação de Euler

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

então a solução geral dessa equação é:

- $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_1}\ln(x)$ se $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = c_1x^u\cos(v\ln(x)) + c_2x^u\,\text{sen}(v\ln(x))$ se $r_1 = u + iv$ e $r_2 = u - iv$.

C. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; n \geq 1.$$

D. $\displaystyle\int \frac{X'(x)}{X(x)}dx = \ln X(x) + C$.