UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2017/2 - 30/11/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \ln x$ centrada em $x = 1$.

Solução

Para dar solução a este problema, temos que lembrar da serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \tag{1}$$

para todo $|r| < 1$.

Antes de mostrar (a), primeiro derivaremos a função $f(x) = \ln(x)$, assim

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$$

basta pegar r por $1-x$ na equação (1), temos

$$(\ln(x))' = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n, \tag{2}$$

finalmente integrando a equação (2), obtemos a série de Taylor em torno de $x = 1$ da função $f(x) = \ln(x)$

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{3}$$

(b) Calcule como uma série de potência a integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x-1}dx$ centrada em $x = 1$.

Solução

Para mostrar (b), basta substituir $\ln(x)$ por (3), logo obtemos

$$\int \frac{\ln(x)}{x-1}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)(x-1)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n(x-1)^n}{(n+1)}dx$$

finalmente integrando obtemos

$$\int \frac{\ln(x)}{x-1}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$$

onde c é uma constante.

Questão 2: (2,5 pontos) Considere a equação

$$x(2-x)y'' + (x+2)y' + 2y = e^{x-1}.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é um ponto ordinário dessa equação.

Solução

Na forma geral $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y = G(x)$ os pontos ordinários são os pontos nos quais as funções $Q(x)/P(x)$ e $R(x)/P(x)$ são analíticas. Já que $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios, então os pontos que não são raízes de $P(x)$ são pontos ordinário. Logo $x_0 = 1$ é ordinário pois ele não é uma raiz de $P(x) = x(2-x)$.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries dessa equação em torno desse ponto.

Solução

Suponhamos que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ é a soluçã da equação. Temos então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \tag{4}$$

Para igualar os coeficientes das potências iguais de $(x-1)$, precisamos de escrever os coeficiente de y em potências de $(x-1)$:

$$x(2-x) = 1-(x-1)^2 \text{ e } x+2 = (x-1)+3. \tag{5}$$

Também substituímos e^{x-1} pela serie de Taylor dela que é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}. \tag{6}$$

Substituindo (2) e (3) na equação dada e mudando os índices, temos

$$x(2-x)y'' = 2\cdot1\cdot a_2 + 3\cdot2\cdot a_3(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^n \tag{7}$$

$$(x+2)y' = a_1(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(x-1)^n + 3(a_1 + 2.a_2(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n) \tag{8}$$

$$2y = 2a_0 + 2a_1(x-1) + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-1)^n \tag{9}$$

Agora somamos as equações (5),(6) e (7) e igualar os coeficientes das potências iguais de $(x-1)$ em (4):

$$2a_2 + 3a_1 + 2a_0 = 1 \tag{10}$$

$$6a_3 + 6a_2 + 3a_1 = 1 \tag{11}$$

A relação de recorrência para $n \geq 2$ é

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (2-n^2)a_n = \frac{1}{n!}. \tag{12}$$

(c) Determine uma cota inferior para o raio de convergência da série encontrada em (b).

Solução

Uma cota inferior para raio de convergência a menor distancia entre x_0 e as raízes (Real e Complexo) de $P(x)$. Portanto a cota inferior será

$$\min\{|1-0|, |1-2|\} = 1.$$

Questão 3: (2,5 pontos)

(a) Determine a série de Fourier em cossenos da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ (x-1)^2 \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solução.

Fazendo a extensão par da função $f(x)$ obtemos

$$\widetilde{f}(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ f(-x), & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \widetilde{f}(x+4) \end{cases}$$

Logo, a série de Fourier associada (em termos de cossenos) é da forma

$$S[\widetilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

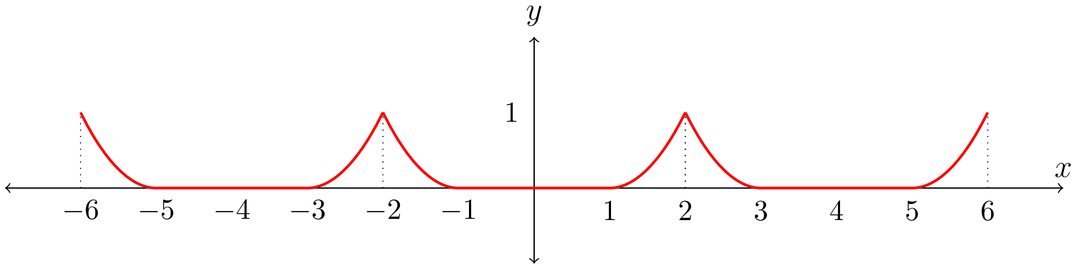
onde

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_1^2 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right], \quad n \geq 1.$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida em (a) no intervalo $[-6,6]$. **Solução**



(c) Calcule o valor da série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}$.

Solução Como $f(x)$ é contínua em $x=1$, a série de Fourier converge nesse ponto para $f(1)$, ou seja

$$0 = f(1) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

onde os coeficientes a_n são dados pela fórmula do primeiro item. Logo, substituindo, concluímos que

$$0 = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Logo, dividindo a suma dos termos pares e ímpares, concluímos que

$$0 = \frac{1}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{4m^2\pi^2} \cos(m\pi) = \frac{1}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{m^2\pi^2}$$

o qual implica que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontre a solução $u : [0,4] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = u & (x,t) \in (0,4) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \;\; u_x(4,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,4]. \end{cases}$$

onde $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ é a função $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \le x < 2 \\ 0 \text{ se } 2 \le x \le 4. \end{cases}$

Solução Procuramos soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Assim temos $X''T - XT' = XT$, ou

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 1 = -\lambda.$$

As expressões acima por X e T dependem de variáveis diferentes. Para coincidirem, elas devem ser iguais a mesma constante, denotada aqui por $-\lambda \in \mathbb{R}$. Também, X satisfaz $X(0) = 0$ e $X'(4) = 0$. Logo, as funções satisfazem

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \quad \text{e} \quad X(0) = 0, X'(4) = 0, \\ T' &= -(\lambda + 1)T. \end{aligned}$$

Para a equação da variável x, pela formulas uteis temos que os autovalores são $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2$ e as auto funções $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)$. Substituindo estes valores λ_n na equação da variável t temos que

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{-\left(\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2+1\right)t} \quad \text{e como consequência} \\ u_n(x,t) &= e^{-\left(\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2+1\right)t}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right). \end{aligned}$$

Para resolver o problema de valor inicial, formamos a série infinita de soluções

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2+1\right)t}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right).$$

Isso deve satisfazer $u(x,0) = f(x) = \sum_n c_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)$. No intervalo $[-4,4]$, toda função (seccionalmente contínua) pode ser representada por uma série de Fourier $\sum_n (b_n \text{sen}(n\pi x/4) + a_n \cos(n\pi x/4)$. Toda função definida em $[0,4]$ pode ser estendida para uma função ímpar em $[-4,4]$ e assim obtemos uma representação como $\sum_n b_n \text{sen}(n\pi x/4)$ (é dizer, com $a_n = 0$). Nesse caso, queremos representar a função f, com domínio $[0,4]$, como $\sum_n c_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)$. Por isso, estendemos a função para o intervalo $[0,8]$ por reflexão em na linha vertical $x = 4$. Isso é,

$$\begin{aligned} f_{ext}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0,4), \\ f(8-x) & \text{se } x \in [4,8] \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,2), \\ 0 & \text{se } x \in [2,6], \\ 8-x & \text{se } x \in (6,8]. \end{cases} \end{aligned}$$

f_{ext} é seccionalmente contínua em $[0,8]$ e então pode ser representada como $\sum_k b_k \text{sen}(k\pi x/8)$, mas com essa escolha de extensão afirmamos que $b_k = 0$ quando $k = 2n$ é par. De fato, b_{2n} é calculado por

$$
\begin{aligned}
b_{2n} &= \frac{2}{8}\int_0^8 f_{ext}(x)\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{8}\right)dx,\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int_6^8 (8-x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx,\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx - \frac{1}{4}\int_2^0 t\text{sen}\left(\frac{n\pi(8-t)}{4}\right)dt,\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx - \frac{1}{4}\int_0^2 t\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right)dt,\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Nesta última igualdade usamos que seno é impar e periódica de período 2π. Analogamente,

$$
\begin{aligned}
b_{2n-1} &= \frac{2}{8}\int_0^2 x\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)dx + \frac{2}{8}\int_6^8 (8-x)\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)dx,\\
&\quad \text{(a mesma substituição mostra que as integrais são iguais)}\\
&= \frac{1}{2}\left(x\frac{-8}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)\Bigg|_0^2 + \int_0^2 \frac{8}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right)dx\right),\\
&= \frac{-8}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right) + \left(\frac{8}{(2n-1)\pi}\right)^2\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Para esses valores de b_{2n-1} a função

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}e^{-\left(\left(\frac{(2n-1)\pi}{8}\right)^2+1\right)t}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right).
$$

é uma solução do problema de valor inicial.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

ALGUMAS FORMULAS ÚTEIS

A. A série de Taylor da função exponencial centrada no $x = 0$ é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y'(4) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda_n = \pi^2 \left(\dfrac{2n-1}{8}\right)^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right), \ n \geq 1.$$