Cálculo IV, Semi-Presencial
1^a Lista de Exercícios
Departamento de Matemática-IM/UFRJ

Supervisão: Prof. S. Hamid Hassanzadeh

Colaborador: Uales Fernandes Bessa Junior

Determine se a sequência é convergente ou divergente. Caso convergente, encontre o limite

1) $a_n = \frac{\text{sen(n)}}{\sqrt{n}}$

Solução: Escolhemos $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e aplicamos o teorema do contorno (sanduíche). Teremos $\frac{|\text{sen(n)}|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ resultando em $|\text{sen(n)}| \leq 1$. Continuando temos que calculcular o limite de b_n

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\text{sen(n)}|}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen(n)}}{\sqrt{n}} = 0$$

como limite de a_n existe, a sequência é convergente.

---

2) $a_n = n\text{sen}\frac{1}{\text{n}}$

Solução: Usando $t = \frac{1}{n}$ para substituir na sequência.

$$\lim_{n\to\infty} n\text{sen}\frac{1}{\text{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{sent}}{t},$$

usando l'Hopital, temos $\lim_{t\to 0}\cos(t) = 1$. Logo a sequência convergente.

---

3) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2+1}$

Solução: Para que seja possível calcularmos o limite é necessário racionalizar

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n^2+1})\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n^2-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$

sequência divergente.

---

4) $a_n = (1 + \frac{2}{n})^{\frac{1}{n}}$

Solução: $\ln a_n = \frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{n})$. $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(\frac{n+2}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\ln(n+2) - ln(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+2)}{n} - \frac{ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+2)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n}$
usando l'Hopital, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Portanto obtemos $\ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = 0$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

sequência convergente.

---

5) $a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n-1}}$

Solução: Fazendo $t = e^n$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t + \frac{1}{t}}{t^{2-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t+1}{t^3 - t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} = 0.$$

sequência convergente.

---

6) $a_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$

Solução: Temos que trocar os índices para separar os valores que se repetem
$a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0, ..., a_n = cosn\frac{\pi}{2}$
Quando $n = 4k$, $\cos(2k\pi) = 1$ para $k = 1, 2, 3, \cdots$
Quando $n = 4k + 2$, $\cos((2k+1)\pi) = -1$ para $k = 1, 2, 3, \cdots$
Como demonstrado $\cos n\frac{\pi}{2}$ é divergente por oscilar.

---

7) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{\sqrt{n}}$

Solução: Ja que $\ln(x)$ é uma funçao continua, $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln(\lim_{n\to\infty} a_n)$.

$\ln(a_n) = \sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n})$. Entao calculamos a seguinte:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(1+n) - \ln(n))}{\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$\ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = 0$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$. Sequência convergente.

Determine se a série é convergente ou divergente

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

Solução: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ simplificando a expressão usando frações $\frac{2}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3}$, resultando em $A = 1$ e $B = -1$, entao calculamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}.$$

Para simplificar a formula adicionamos e subtraimos o fator $\frac{1}{n+2}$, i.e. teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) - (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})$$

Cada soma é uma serie telescopica, como limite da soma existe, a série é covergente e o limite é $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

---

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.8^{n-1} - 0.3^n$

Solução: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.8^{n-1} - 0,3^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.8^{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.3^n$

calculando s_n de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.8^{n-1}$

$s_n = 1 + 0,8 + 0.8^2 + ... + 0.8^{n-1}$

$0.8s_n = 0.8 + 0,8^2 + ... + 0.8^n$

$s_n - 0.8s_n = 1 - 0.8^n$ $s_n = \frac{1-0.8^n}{1-0.8} = \frac{1-0.8^n}{0.2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(4/5)^n}{0.2} = 5$

Fazendo o mesmo para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0.3^n$ temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(3/10)^n}{0.7} = \frac{10}{7}$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(4/5)^n}{0.2} - \frac{1-(3/10)^n}{0.7} = 5 - \frac{10}{7} = \frac{25}{7}$

como limite da soma existe a série é convergente.

---

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{2n+5})$

Solução: aplicando o teste da divergência, temos

$$\lim_{n\to\infty} ln(\frac{n}{2n+5}) = \lim_{n\to\infty} ln(\frac{n/n}{(2n+5)/n}) = \lim_{n\to\infty} ln(\frac{1}{2+5/n}) = ln(\frac{1}{2})$$

como o limite é $\neq 0$, então a série é divergente.

---

11) $\sum \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}$

Solução: Série geométrica: $\sum ar^n$
$\sum \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} = 3\sum \frac{1}{5^n} + 2\sum \frac{1}{n}$. A série $\sum \frac{1}{5^n}$ é geométrica com $r < 1$, logo converge. Já a série $\sum \frac{1}{n}$ é harmônica e por isso é divergente. Logo a série $\sum \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}$ é divergente.

---

12) Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln{(1+\frac{1}{n})}$$

é divergente mesmo com termos se aproxiamndo de 0.

Solução: Toda série convergente tem limite tendendo a 0, porém o inverso não é recíproco.
$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1) = 0$, de outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Logo

$$s_k = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + ... + \ln(k+1) - \ln k = \ln(k+1).$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln{(1+\frac{1}{n})} = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \ln(1+k) = \infty$ portanto a série é divergente.