UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2017/2, 26/09/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série abaixo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^3}{n!}$.

Solução: O termo $a_n = \dfrac{(-2)^n n^3}{n!}$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{n+1} = 0\,(<1),$$

então, pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente.

(b) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Solução

Sendo $a_n = \frac{(-3)^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, aplicamos o teste de razão. Teremos

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \left|-3(x-1)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty} 3|x-1|,$$

o qual é menor do que 1 se $|x-1| < 1/3$. Logo o raio de convergência da série é 1/3

Para determinar o intervalo de convergência, precisarmos verificar o que que acontece com a série nos pontos extremos $x-1 = -(1/3)$ e $x-1 = 1/3$.

Se $x-1 = -(1/3)$, então $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Logo (a menos de um deslocamento) a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma p-série para $p = 1/2$. Portanto a série é divergente.

Se $x-1 = (1/3)$, então $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ e a série é alternada, agora definamos $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, então b_n é uma sequência decrescente com limite zero, assim o teste de convergência para séries alternadas determina que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Conclusão: O intervalo de convergência é: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução

Seja $b_n = 1/n$ e $a_n = (n^{1+\frac{1}{n}})^{-1}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

pois $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, como pode ser visto usando a regra de l'Hôpital. Então pelo teste de comparação no limite, podemos concluir que como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então a série $\sum a_n$ também diverge.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial $xy'' + (1-x)y' + cy = 0$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular (justifique sua resposta).

Solução

Reescrevendo a equação na forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0,$$

identificamos $p(x) = (1-x)$ e $q(x) = cx$, analíticas em $x = 0$, logo $x = 0$ é ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência associada.

Solução

A equação indicial está definida por

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0,$$

onde $p_0 = p(0) = 1$ e $q_0 = q(0) = 0$. Portanto a equação indicial está definida por $F(r) = r^2$. As raízes dessa equação são $r_1 = r_2 = 0$. Para a equação de recorrência usamos a raiz $r_1 = 0$ para definir a solução em séries:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Substituindo na equação

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Uniformizando índices e potências obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1)n + a_{n+1}(n+1) - a_n n + c a_n\right] x^n = 0,$$

de onde deduzimos a relação de recorrência

$$a_{n+1} = \frac{n-c}{(n+1)^2} a_n \ , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(c) Supondo que $c = m \in \mathbb{Z}^+$ (inteiro positivo), mostre que existe uma solução do que se reduz a um polinômio. Especifique qual é o grau desse polinômio.

Solução

Da relação de recorrência do item anterior temos que, para $c = m$:

$$a_{n+1} = \frac{n-m}{(n+1)^2} a_n \ , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

onde o termo geral sempre depende do termo anterior. Além disso, note que o termo a_{m+1} tem por equação

$$a_{m+1} = \frac{m-m}{(m+1)^2} a_m = 0.$$

Logo os termos seguintes $a_{m+k} = 0$ para todo $k = 1, 2, 3.....$ Portanto a solução se reduz ao sumatório

$$y(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \ , \quad \text{polinômio de grau } m.$$

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre todos os valores não nulos de θ para os quais todas as soluções de

$$\theta x^2 y'' - x y' = 0$$

têm limite finito quando x tende a zero.

Solução:

Observemos que estamos procurando valores não nulos de θ, então dividindo por θ a equação anterior, temos

$$x^2 y'' - \frac{1}{\theta} x y' = 0.$$

Esta última equação é uma equação de Euler, com equação de segundo grau

$$r(r-1) - \frac{1}{\theta} r = r^2 - \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) r = 0.$$

A equação quadrática anterior tem duas raízes reais $r_1 = 0$ e $r_2 = 1 + \frac{1}{\theta}$. Vamos destacar três caso:

Caso 1: $\underline{\theta = -1}$. Neste caso $r_1 = r_2 = 0$ e a solução geral da equação de Euler é

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln|x| \ \text{ com } \ C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Por tanto, tomando $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, temos uma solução $y(x) = \ln|x|$ a qual não têm limite finito quando x tende a zero, assim o valor de $\theta = -1$ é desconsiderado.

Caso 2: $\underline{1 + \frac{1}{\theta} < 0 \Longleftrightarrow -1 < \theta < 0}$. Neste caso $r = 0$ e $r_2 < 0$ e a solução geral da equação de Euler é da forma

$$y(x) = C_1 + C_2 |x|^{1+\frac{1}{\theta}} \ \text{ com } \ C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Claramente, tomando $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, temos uma solução $y(x) = |x|^{1+\frac{1}{\theta}}$ a qual não têm limite finito quando x tende a zero (pois $1 + \frac{1}{\theta} < 0$), assim os valores

$-1 < \theta < 0$ são desconsiderados.

Caso 3: $\underline{1 + \frac{1}{\theta} > 0 \iff -\infty < \theta < -1 \text{ ou } 0 < \theta < +\infty}$. Neste caso $r = 0$ e $r_2 > 0$ e a solução geral da equação de Euler é da forma

$$y(x) = C_1 + C_2|x|^{1+\frac{1}{\theta}} \quad \text{com} \quad C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

Logo, como $r_2 = 1 + \frac{1}{\theta} > 0$, então para quaisquer constantes C_1 e C_2, temos que $y(x)$ têm limite finito quando x tende a zero.

Podemos concluir então que os valores de θ que respondem a questão estão no conjunto

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Question 4: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \text{sen}(t)u_{\frac{\pi}{2}}(t) + \cos(t) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde $u_{\frac{\pi}{2}}(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em $\frac{\pi}{2}$.

Solução

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos lados da equação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) + 4y'(t) + 5y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin(t) + \cos(t)\}(s), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que das condições iniciais obtemos

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 1,$$
$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$

Além disso sabemos

$$\mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\sin(t + \frac{\pi}{2})\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\left[\frac{s}{s^2+1}\right],$$
$$\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Logo substituindo na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 4s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - 1 &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \frac{s}{s^2+1}, \\ (s^2 + 4s + 5)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \frac{s}{s^2+1} + 1, \end{aligned}$$

Além disso, note que $s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1$, logo

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\left[\frac{s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)}\right] + \frac{s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)} + \frac{1}{(s+2)^2+1}.$$

Definamos

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)}$$

e lembremos que $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(t)\}(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2+1}$, assim a equação anterior fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin(t)\right\}(s). \\
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)h(t-\frac{\pi}{2})\right\}(s) + \mathcal{L}\{h(t)\}(s) + \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin(t)\right\}(s).
\end{aligned}$$

Portanto a solução é

$$y(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)h(t-\frac{\pi}{2}) + h(t) + e^{-2t}\sin(t). \tag{1}$$

então somente falta determinar $h(t)$. De fato, usando frações parciais, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{h(t)\}(s) &= \frac{s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)} \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{s+1}{s^2+1} - \left\{\frac{s+5}{(s+2)^2+1}\right\}\right], \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{3}{(s+2)^2+1}\right\}\right], \\
&= \frac{1}{8}\left[\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) - \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos(t)\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\sin(t)\right\}(s)\right].
\end{aligned}$$

Portanto

$$h(t) = \frac{1}{8}\left(\cos(t) + \sin(t) - e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\sin(t)\right). \tag{2}$$

finalmente substituindo (2) em (1) obtemos a solução

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left\{\frac{1}{8}\left(\sin(t) - \cos(t) - e^{\pi-2t}\sin(t) + 3e^{\pi-2t}\cos(t)\right)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\cos(t) + \sin(t) - e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\sin(t)\right) \\
&\quad + e^{-2t}\sin(t).
\end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$