UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo IV- 2016/2, 13/12/2016

Questão 1: (2.5 pontos) Determine se as séries a seguir são divergentes, condicionalmente convergentes ou absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n)}{n^3}$

Solução: Pelo teste da comparação, perceba que a presença de $\operatorname{sen}(n)$ faz com que esta não seja uma série alternada, pois seus termos mudam de sinal sem a regularidade necessária. Por outro lado, a série de seus valores absolutos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^3}$, pode ser testada por comparação:

$$\frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, a série dos valores absolutos converge e, consequentemente, a série original é absolutamente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n^2}}{(n!)^2}$

Solução:

Pelos testes da raíz e da comparação

Já que $n! \leq n^n$, podemos utilizar a comparação $\dfrac{5^{n^2}}{(n!)^2} \geq \dfrac{5^{n^2}}{(n^n)^2}$. Submetendo a série referente a este termo anterior ao teste da raiz, obtém-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^{n^2}}{(n^n)^2}\right|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{n^2}}{n^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n (\ln 5)^2}{2} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

onde a regra de L'Hospital foi utilizada duas vezes. Portanto, a série original é divergente.

Pelo teste da razão

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{5^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{5^{n^2}}{(n!)^2}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{5^{n^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n^2+2n+1}}{(n+1)^2\,(n!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{5^{n^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{2n+1}}{(n+1)^2}\right| \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de esse limite ser semelhante ao calculado no teste da raiz.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+3n\cos^2(n)}$

Solução:

Pelo teste da comparação

O termo no denominador satisfaz $n + 3n\cos^2 n \leq 4n$. Portanto,

$$\frac{2}{n+3n\cos^2 n} \geq \frac{2}{4n} = \frac{1}{2n}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ diverge, a série é divergente.

Questão 2: (2.5 pontos) Considere a equação: $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$.

(a) Mostre que $x = 0$ é ponto singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial no ponto $x = 0$.

(c) Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde à maior raiz da equação indicial.

Solução:

(a) A equação é da forma:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde $P(x) = 2x^2,\ Q(x) = 3x$ e $R(x) = 2x^2 - 1$.

Como $P(0) = 0$, o ponto $x = 0$ é ponto singular da equação. Temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)} = \frac{x\cdot 3x}{2x^2} = \frac{3}{2} = p_0$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)} = \frac{x^2(2x^2-1)}{2x^2} = -\frac{1}{2} = q_0$$

Como estes limites existem, $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

(b) A equação de Euler associada é:

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0,$$

onde p_0 e q_0 foram determinados no item anterior. Logo,

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + \frac{1}{2}y = 0.$$

Substituindo $y = x^r$, temos:

$$\begin{aligned} x^2r(r-1)x^{r-2} + \frac{3}{2}x \cdot rx^{r-1} - \frac{1}{2}x^r &= 0 \\ \Leftrightarrow [r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}]x^r &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação indicial é dada por:

$$2r^2 + r - 1 = 0.$$

Suas raízes são: $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1$.

(c) A solução tem a forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$.

Logo, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1}$ e $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}$.

Substituindo na equação, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[2(r+n)(r+n-1) + 3(r+n) - 1]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow [r(2r+1) - 1]\, a_0 x^r + [(r+1)(2r+3) - 1]a_1 x^{r+1} + & \\ \sum_{n=2}^{\infty}[((n+r)(2n+2r+1) - 1)a_n + 2a_{n-2}]x^{r+n} &= 0 \end{aligned}$$

Devemos então, ter:

$$\begin{cases} r(2r+1) - 1 = 0 \\ (r+1)(2r+3) - 1 = 0 \\ ((n+r)(2n+2r+1) - 1)a_n + 2a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Para $r = 1/2$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 \text{ é arbitrário} \\ 5a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ [(2n+1)(n+1) - 1]a_n + 2a_{n-2} = 0, \text{ para } n = 2, 3, 4, \cdots \end{cases}$$

Podemos tomar $a_0 = 1$ e neste caso, temos a relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \dfrac{-2a_{n-2}}{n(2n+3)}, & \text{para } n = 2, 4, 6, \cdots \\ a_n = 0, & \text{para } n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$$

Questão 3: (2.5 pontos) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \cos(t)u_\pi(t), \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde u_π é a função degrau unitário com singularidade em π.
Solução:

Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 5y = \cos(t)\mu_\pi(t)$$

com condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Resolver o problema anterior é equivalente a resolver o problema

$$y'' + 4y' + 5y = -\mu_\pi(t)\cos(t - \pi)$$

com condições iniciais $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Aplicando a transformada de Laplace temos:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

onde $Y(s)$ é a transformada de Laplace de $y(t)$. Das condições iniciais, segue a igualdade

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = 1 - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)}$$

e assim

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}$$

pelo método de frações parciais, temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} - e^{-\pi s}\left[\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}\right]$$

De onde $A = \dfrac{1}{8}$, $B = \dfrac{1}{8}$, $C = -\dfrac{1}{8}$ e $D = -\dfrac{5}{8}$

Logo:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} - e^{-\pi s}\left[\frac{1}{8}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{8}\frac{s}{(s+2)^2+1} - \frac{5}{8}\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{8}e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{8}e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{8}e^{-\pi s}\frac{s}{(s+2)^2+1} + \frac{5}{8}e^{-\pi s}\frac{1}{(s+2)^2+1}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a ambos os lados da igualdade anterior temos que:

$$y(t) = e^{-2t}\sin t - \frac{1}{8}\mu_\pi(t)\cos(t-\pi) - \frac{1}{8}\mu_\pi(t)\sin(t-\pi) + \frac{1}{8}\mu_\pi(t)e^{-2(t-\pi)}\cos(t-\pi) + \frac{3}{8}\mu_\pi(t)e^{-2(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

Questão 4: (2.5 pontos) Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

Solução:

Como queremos a série de Fourier em senos, então vamos considerar a extensão impar de $f(x)$, neste caso o intervalo tem comprimento $2L = 4$, assim $L = 2$. Como a extensão é impar, então $a_m = 0$, para todo $m \geq 0$ e

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 x\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= -\frac{2}{m\pi}x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{m\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx - \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{m\pi}\frac{2}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{2}{m\pi}\cos(m\pi) \\ &= \frac{4}{(m\pi)^2}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{2}{m\pi}\cos(m\pi). \end{aligned}$$

A série de Fourier é então

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{4}{(m\pi)^2}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{2}{m\pi}\cos(m\pi)\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6,6]$.

Solução:

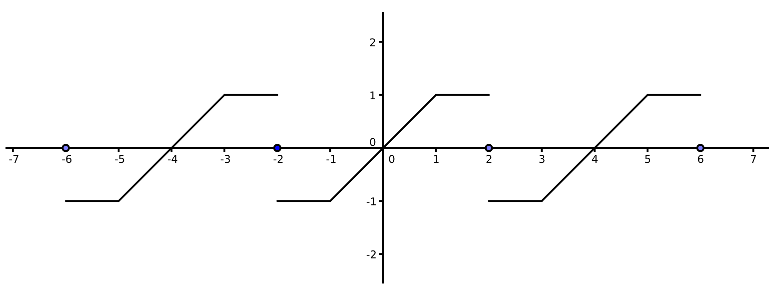

Figura 1:

A: O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

B: Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a \rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$