TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.0 pontos)
Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 e^{-n}$.

(b) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

Questão 2: (2.0 pontos)
Considere a série de potências:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{2^n\sqrt{n^3}}$$

(a) (1.5 ponto) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência dessa série.

(b) (0.5 ponto) Encontre $f^{(15)}(-1)$ (a derivada de ordem 15 da função f em $x=-1$).

Questão 3: (3.0 pontos)
A seguinte equação, chamada equação de Hermite, tem um papel importante na teoria da mecânica quântica.

$$y''+(x-1)y'+y=0$$

(a) (1.5 ponto) Encontre a fórmula de recorrência para os coeficientes da solução em série de potências centrada em $x=1$.

(b) (1.0 ponto) Mostre que a solução geral está definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

(c) (0.5 ponto) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} y_0(x)$, onde $y_0(x)$ é a solução satisfazendo $y(1)=1$, $y'(1)=0$. (Sugestão: Use que $2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$.)

Questão 4: (3.0 pontos)
Considere a equação

$$x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0.$$

(a) (0.5 ponto) Mostre que $x=0$ é um ponto singular regular.

(b) (1.0 ponto) Determine as raízes da equação indicial.

(c) (1.0 ponto) Determine a fórmula de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x=0$ da solução $y(x)$ que corresponde à *maior* das duas raízes da equação indicial.

(d) (0.5 ponto) Determine os 3 primeiros termos *não nulos* da solução $y(x)$ encontrada no item (c) e que, além disso, satisfaz $\lim_{x\to 0^+} y(x)/x^3=1$.

 Boa prova!