TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.0 pontos)
Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) (1.0 ponto) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 e^{-n}$.

Solução:
Aplicamos o teste de razão. O m-ésimo termo da série é

$$a_m = (-1)^m m^2 e^{-m}.$$

Daí

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to+\infty}\left|\frac{(m+1)^2e^{-(m+1)}}{m^2e^{-m}}\right| = \lim_{m\to+\infty}\frac{(m+1)^2}{m^2}e^{-1} = e^{-1} < 1.$$

Daí, pelo teste de razão, a série é absolutamente convergente.

(b) (1.0 ponto) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

Solução:
Aplicamos o teste de divergência. O m-ésimo termo da série é

$$a_m = \frac{\sqrt{m+\sqrt{m}}}{\sqrt{3m+1}}.$$

Daí

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = \lim_{m\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\sqrt{m}}}{\sqrt{3m+1}} = \lim_{m\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{m}}}}{\sqrt{3+\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0.$$

Pelo teste de divergência, a série é divergente.

Questão 2: (2.0 pontos)
Considere a série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{2^n\sqrt{n^3}}$$

(a) (1.5 ponto) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência dessa série.

Solução:
O m-ésimo termo da série é

$$a_m = \frac{(x+1)^{m-1}}{2^m\sqrt{m}}.$$

Aplicamos o teste de razão para determinar o raio de convergência.

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to+\infty}\frac{|x+1|^m}{2^{m+1}\sqrt{m+1}}\frac{2^m\sqrt{m}}{|x+1|^{m-1}} = \lim_{m\to+\infty}|x+1|\,\frac{\sqrt{m+1}}{2\sqrt{m}} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Pelo teste de razão, essa série é convergente para $|x+1| < 2$ e é divergente para $|x+1| > 2$. O raio de convergencía então é igual á 2.

Para determinar o intervalo de convergêncía, estudamos a convergência da série em $x = 1$ e em $x = -3$. Em $x = 1$, temos

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{m-1}}{2^m \sqrt{m^3}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}.$$

Essa série, sendo uma p-série com $p = -3/2 < -1$, é convergente. Quando $x = -3$, temos

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^{m-1}}{2^m \sqrt{m^3}} = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^{-3/2},$$

que é absolutamente convergente pela conta anterior. Concluimos que o intervalo de convergência da série é $[-3, 1]$.

(b) (0.5 ponto) Encontre $f^{(15)}(-1)$ (a derivada de ordem 15 da função f em $x = -1$).

Solução:
Pelo teorema de Taylor,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(-1)}{m!} (x+1)^m.$$

Porem,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{m-1}}{2^m \sqrt{m^3}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+1)^m}{2^{m+1} \sqrt{(m+1)^3}},$$

e igualando coeficientes, temos,

$$\frac{f^{(15)}(-1)}{15!} = \frac{1}{2^{16} \sqrt{16^3}}.$$

Deste modo

$$f^{(15)}(-1) = \frac{15!}{2^{16} \sqrt{16^3}}.$$

Questão 3: (3.0 pontos)
A seguinte equação, chamada equação de Hermite, tem um papel importante na teoria da mecânica quântica.

$$y'' + (x-1)y' + y = 0$$

(a) (1.5 ponto) Encontre a fórmula de recorrência para os coeficientes da solução em série de potências centrada em $x = 1$.

Solução:
Substituindo $t = x - 1$, temos

$$\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0.$$

A série de Taylor de y se escreve

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m,$$

e as derivadas de y são

$$\dot{y} = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1},$$
$$\ddot{y} = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m t^{m-2}.$$

Substituindo na equação, temos então

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-2} + t\sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0,$$
$$\therefore \quad \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}t^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0.$$

Igualando coefficientes, temos para todo $m \geq 1$,

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} + m a_m + a_m = 0,$$

e para $m = 0$,

$$2a_2 + a_0 = 0.$$

Assim

$$a_{m+2} = \frac{-a_m}{(m+2)},$$

para todo $m \geq 0$. Como as coeficientes da série de taylor de y em x em torno de 1 são os mesmos, a relação de recorrência também é o mesmo.

(b) (1.0 ponto) Mostre que a solução geral está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:
Os coefficientes da equação são polinômios. Em particular, são funções com séries de Taylor todas com raio de convergência infinito. Assim, a solução y também tem raio de convergência infinita, e em particular a solução é definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) (0.5 ponto) Calcule $\lim_{x\to\infty} y_0(x)$, onde $y_0(x)$ é a solução satisfazendo $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. (Sugestão: Use que $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$.)

Solução:
Pelo teorema de Taylor, com essas condições iniciais,

$$a_0 = y(1) = 1,$$
$$a_1 = y'(1) = 0.$$

Aplicando a relação de recorrência, vemos que $a_m = 0$ para todo m ímpar. Para o caso par, usamos a sugestão, e obtemos

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} = \frac{(-1)^m}{2^m m!}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(x-1)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x-1)^{2m}}{2^m m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{-(x-1)^2}{2} \right)^m = \mathrm{e}^{\frac{-(x-1)^2}{2}}. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\lim_{x \to +\infty} y_0(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-(x-1)^2}{2}} = 0.$$

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere a equação

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0.$$

(a) (0.5 ponto) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

Solução:

As coeficientes da equação são

$$P(x) = x^2, \; Q(X) = x, \; R(x) = x^2 - 9.$$

Como $P(0) = 0$, essa equação tem ponto singular em $x = 0$. Contudo,

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{xQ(x)}{P(x)} = 1, \\ r(x) &= \frac{x^2 R(x)}{P(x)} = \frac{x^4 - 9x^2}{x^2} = x^2 - 9, \end{aligned}$$

e como essas funções são analíticas em 0, essa equação tem ponto singular regular em $x = 0$.

(b) (1.0 ponto) Determine as raízes da equação indicial.

Solução:

As coeficientes da equação de Euler que corresponde á essa equação são

$$\begin{aligned} \alpha &= q(0) = 1, \\ \beta &= r(0) = -9. \end{aligned}$$

A equação indicial é então

$$\begin{aligned} r^2 + (\alpha - 1)r + \beta &= 0 \\ \therefore \quad r^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

As duas raizes da equação indicial então são $r = \pm 3$.

(c) (1.0 ponto) Determine a fórmula de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde à *maior* das duas raízes da equação indicial.

Solução:
Seja y uma solução da forma

$$y = x^3 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+3}.$$

As derivadas dessa função são

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+3) a_m x^{m+2}, \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+3)(m+2) a_m x^{m+1}. \end{aligned}$$

Substituindo para y na equação, temos

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} (m+3)(m+2) a_m x^{m+3} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+3) a_m x^{m+3} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+5} - \sum_{m=0}^{\infty} 9 a_m x^{m+3} &&= 0 \\ \therefore \quad &\sum_{m=0}^{\infty} ((m+3)(m+2) + (m+3) - 9) a_m x^{m+3} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+3} &&= 0 \\ \therefore \quad &5 a_1 x^4 + \sum_{m=2}^{\infty} ((m+3)^2 - 9) a_m + a_{m-2}) x^{m+3} &&= 0. \end{aligned}$$

Igualando as coefficientes, temos $a_1 = 0$ e

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{(m+3)^2 - 9}$$

para todo $m \geq 2$.

(d) (0.5 ponto) Determine os 3 primeiros termos *não nulos* da solução $y(x)$ encontrada no item (c) e que, além disso, satisfaz $\lim_{x \to 0^+} y(x)/x^3 = 1$.

Solução:
Como

$$\lim_{x \to 0^+} y(x)/x^3 = \lim_{x \to 0^+} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0, \tag{1}$$

temos $a_0 = 1$. Logo, aplicando a relação de recorrência, temos

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 0,$$
$$a_2 = \frac{-1}{16},$$
$$a_3 = 0,$$
$$a_4 = \frac{1}{640}.$$

Isto é,

$$y = x^3 - \frac{x^5}{16} + \frac{x^7}{640} - ...$$