Questão 1: (2.5 pontos)

Estudar a convergência ou divergência de cada uma das séries a seguir. Em caso de convergência, classificar a mesma em condicional ou absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n!}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

c) De forma mais geral, determinar para quais valores positivos de α a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ é convergente.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considerar a série de potências $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.

a) Determinar o raio de convergência e estudar o comportamento da série nos valores extremos do intervalo aberto de convergência absoluta.

b) Calcular a função $f(x)$ que representa a série no intervalo aberto de convergência absoluta.
Sugestão. *Usar os resultados de derivação e integração termo a termo e lembrar que uma primitiva da função* $g(t) = \ln t$ é dada por $G(t) = t \ln t - t$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação de Chebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \kappa^2 y = 0, \tag{1}$$

onde κ é uma constante inteiro não-negativo.

a) Justificar que $x = 0$ é um ponto ordinário de (1).

b) Determinar uma cota inferior para o raio de convergência da solução de (1), dada em série de potências em torno do ponto $x = 0$.

c) Determinar a relação de recorrência que satisfazem os coeficientes a_n da solução em série de potências citada no item b).

d) Considerar $\kappa = 4$ e determinar as soluções de (1), em série de potências, que verificam a condição $y'(0) = 0$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considerar a equação de Euler:

$$x^2 y'' + \alpha x y' - \alpha y = 0, \quad x > 0. \tag{2}$$

a) Determinar a solução geral de (2).

b) Determinar os valores de α para os quais todas suas respectivas soluções $y(x)$, encontradas em a), satisfazem a condição: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} y(x) = 0$.

 Boa prova!