Questão 1: (2.5 pontos)

Estudar a convergência ou divergência de cada uma das séries a seguir. Em caso de convergência, classificar a mesma em condicional ou absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n!}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

c) De forma mais geral, determinar para quais valores positivos de α a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ é convergente.

Solução:

a) O n-ésimo termo é dado por $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n!}}$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n^3+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{1+3n^{-1}+3n^{-2}+2n^{-3}}}{\sqrt{1+n^{-3}}} \\ &= 0; \end{aligned}$$

logo, pelo teste de razão, a série converge absolutamente.

b) O n-ésimo termo é dado por $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$. Assim, para todo $n \geq 2$ tem-se

$$(n+1)\ln(n+1) \geq n\ln n.$$

Daí segue que $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ e, além disso, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$. Então, pelo teste para séries alternadas, a série é convergente. Contudo, a igualdade

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{s}ds = +\infty,$$

implica, pelo teste de integral, que a série dos valores absolutos diverge. Concluímos então que a série converge condicionalmente.

c) O n-ésimo termo é dado por $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. Como $\alpha > 0$, segue de forma similar ao item (b) que, $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 2$. Além disso,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{s^\alpha}ds,$$

que converge se, e somente se, $\alpha > 1$; segue então do teste de integral que essa série converge se, e somente se, $\alpha > 1$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considerar a série de potências $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.

a) Determinar o raio de convergência e estudar o comportamento da série nos valores extremos do intervalo aberto de convergência absoluta.

b) Calcular a função $f(x)$ que representa a série no intervalo aberto de convergência absoluta.
Sugestão. *Usar os resultados de derivação e integração termo a termo e lembrar que uma primitiva da função* $g(t) = \ln t$ é dada por $G(t) = t\ln t - t$.

Solução:

a) Aplicamos o critério da razão: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{n(n+1)} = 1$, portanto o raio de convergência é 1. A série está centrada em zero; logo o intervalo aberto de convergência absoluta é $]-1,1[$.
Em $x=1$ o termo geral da série é $\dfrac{1}{(n-1)n}$ e satisfaz $0 \leq \dfrac{1}{(n-1)n} \leq \dfrac{1}{(n-1)^2}$ para todo $n \geq 2$. Então, pelo critério de comparação a série converge, pois $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < +\infty$.
Em $x=-1$ a série é absolutamente convergente pelo estudo anterior (o critério de Leibniz para as séries alternadas vale também).

b) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$ para $|x| < 1$. Então,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{e} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Como $f'(0) = 0$, integrando $f''(x)$ obtemos que $f'(x) = -\ln(1-x)$. Similarmente, usando que $f(0) = 0$ e a sugestão dada, integramos $f'(x)$ para obtermos

$$f(x) = -\int_0^x \ln(1-s)ds = \int_1^{1-x} \ln t\, dt = (1-x)\Big[\ln(1-x) - 1\Big] + 1.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação de Chebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \kappa^2 y = 0, \tag{1}$$

onde κ é uma constante inteiro não-negativo.

a) Justificar que $x = 0$ é um ponto ordinário de (1).

b) Determinar uma cota inferior para o raio de convergência da solução de (1), dada em série de potências em torno do ponto $x = 0$.

c) Determinar a relação de recorrência que satisfazem os coeficientes a_n da solução em série de potências citada no item b).

d) Considerar $\kappa = 4$ e determinar as soluções de (1), em série de potências, que verificam a condição $y'(0) = 0$.

Solução:

a) A equação é dada por $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$, onde

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - x^2, \\ q(x) &= -x, \\ r(x) &= \kappa^2. \end{aligned}$$

Como p é um polinômio tal que $p(0) = 1 \neq 0$, temos que $x = 0$ é ponto ordinário para essa equação.

b) Os raízes de p são ± 1 e a distância de $x = 0$ a cada um desses pontos é igual a 1, de onde concluímos que uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série de (1), em torno do ponto $x = 0$, é $R = 1$.

c) Seja $y =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então numa vizinhança de $x = 0$ temos as igualdades:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Substituindo as expressões anteriores em (1) seguem as igualdades:

$$\begin{aligned} & (1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \kappa^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \\ \therefore \quad & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \kappa^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \\ \therefore \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \kappa^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \\ \therefore \quad & (2a_2 + \kappa^2 a_0) + (6a_3 - a_1 + \kappa^2 a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(n+1)(n+2) a_{n+2} - (n^2 - \kappa^2) a_n \Big] x^n = 0. \end{aligned}$$

A relação de recorrência das coeficientes da solução em série de (1) é então

$$a_{n+2} = \frac{(n^2 - \kappa^2)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

d) Pelo teorema de Taylor $a_1 = y'(0) = 0$ e como $\kappa = 4$ temos que

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{15}{6} a_1 &= 0, \\ a_5 &= -\frac{7}{20} a_3 &= 0, \end{aligned}$$

e procedendo assim, vemos que $a_{2k+1} = 0$ para todo $k = 0, 1, 2 \ldots$. Por outro lado, os elementos com índices pares satisfazem

$$\begin{aligned} a_2 &= -8a_0, \\ a_4 &= -a_2 = 8a_0, \\ a_6 &= 0 \cdot a_4 = 0, \end{aligned}$$

e procedendo assim, vemos que $a_{2k} = 0$ para todo $k \geq 3$. Portanto, que a solução geral com condição inicial $y'(0) = 0$ é dada por

$$y(x) = a_0(1 - 8x^2 + 8x^4), \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considerar a equação de Euler:

$$x^2y'' + \alpha xy' - \alpha y = 0, \quad x > 0. \tag{2}$$

a) Determinar a solução geral de (2).

b) Determinar os valores de α para os quais todas suas respectivas soluções $y(x)$, encontradas em a), satisfazem a condição: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha y(x) = 0$.

Solução:

a) Procuramos por soluções da forma $y(x) = x^r$, definidas para $x > 0$. Ao substituir a expressão anterior em (2) obtemos que r deverá satisfazer a equação de segundo grau

$$r^2 + (\alpha - 1)r - \alpha = (r + \alpha)(r - 1) = 0.$$

Assim, os possíveis valores para r são $r = 1$ ou $r = -\alpha$. Dividimos a análise em dois casos:
Caso A: $\boldsymbol{\alpha \neq -1}$. Nesse caso as raízes são distintas, sendo a solução geral dada pela expressão

$$y(x) = c_1x + c_2x^{-\alpha}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso B: $\boldsymbol{\alpha = -1}$. Neste caso $r = 1$ é uma raiz real dupla, logo a solução geral é dada por

$$y(x) = x(c_1 + c_2 \ln x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) No caso A ($\alpha \neq -1$) tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha y(x) = c_1 \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} + c_2 = 0$$

se, e somente se, $c_1 = c_2 = 0$ ou $\Big(\alpha + 1 > 0 \text{ e } c_2 = 0\Big)$. Portanto, sempre existem soluções que não satisfazem a condição.

No caso B ($\alpha = -1$) tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1}y(x) = c_1 + c_2 \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0$$

se, e somente se, $c_1 = c_2 = 0$; ou seja, a única solução que satisfaz a condição é a solução nula.

Em resumo, não existe valor real de $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaz a propriedade exigida.