



TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \ln(m)}{m^2 + 1}$.

(b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\sqrt{m^4 + 1}}$.

(c) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1) \ln(m+1)^3}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a função

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 + 2x}{1 - 2x} \right).$$

- (a) Determine a série de MacLaurin dessa função.
- (b) Determine o raio de convergência dessa série.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação de Euler com parâmetro

$$x^2 y'' + xy' + \beta y = 0.$$

Encontre todos os valores de β para os quais existe ao menos uma solução $y(x)$ que satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \infty$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere a equação

$$3x^2 y'' + 5xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

- (a) Mostre que 0 é ponto singular regular dessa equação.
- (b) Determine as raízes da equação indicial dessa equação.
- (c) Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 0$ da solução $y(x)$ que corresponde à *menor* das duas raízes da equação indicial.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.