UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo IV- 2017/2, 26/09/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência da série abaixo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^3}{n!}$.

(b) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial $xy'' + (1-x)y' + cy = 0$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular (justifique sua resposta).

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência associada.

(c) Supondo que $c = m \in \mathbb{Z}^+$ (inteiro positivo), mostre que existe uma solução do que se reduz a um polinômio. Especifique qual é o grau desse polinômio.

Questão 3: (2,5 pontos) Encontre todos os valores não nulos de θ para os quais todas as soluções de

$$\theta x^2 y'' - xy' = 0$$

têm limite finito quando x tende a zero.

Question 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \operatorname{sen}(t) u_{\frac{\pi}{2}}(t) + \cos(t) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \end{cases}$$

onde $u_{\frac{\pi}{2}}(t)$ é a função degrau unitário com descontinuidade em $\frac{\pi}{2}$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\dfrac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-\ldots-f^{(m-1)}(0)$