TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\sqrt{4+3m^4}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-m^3}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a série de potências

$$f(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^m}{(m+1)^2}.$$

(a) Determine o intervalo de convergência desta série.

(b) Determine $f^{(10)}(-1/2)$, a décima derivada de f em $-1/2$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a seguinte EDO:

$$2(x-1)y'' + xy' + y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto singular regular desta equação.

(b) Determine as raízes da equação indicial desta equação.

(c) Determine a relação de recorrência da solução em séries associada à maior das duas raízes encontradas na parte (b).

Questão 4: (2.5 pontos)

Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = u_\pi(x)\text{sen}(x) + \delta_\pi(x)\cos(x) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde $u_\pi(x)$ é a função degrau unitário com singularidade em π e $\delta_\pi(x)$ é a função delta de Dirac com singularidade em π.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$t^m e^{at}\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s>a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\delta_a(t)f(t)$	$e^{-as}f(a)$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$