TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Estude a convergência, convergência absoluta ou divergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\sqrt{4+3m^4}}$.

Solução:

A série de valores absolutos desta série é

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\sqrt{4+3m^4}}.$$

Comparando com a série harmônica

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m},$$

temos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\sqrt{4+3m^4}} \Big/ \frac{1}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^2}{\sqrt{4+3m^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como a série harmónica é divergente, segue pelo teste de comparação no limite que a série de valores absolutos é divergente.

Esta série é uma série alternada com m-ésimo termo

$$a_m = (-1)^m f(m)$$

onde

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{4+3x^4}}.$$

Esta função é positiva. Sua derivada é

$$f'(x) = \frac{4-3x^4}{\sqrt{4+3x^4}^3}.$$

Como $f'(x)$ é negativo no intervalo $[2,\infty[$, a função f é decrescente neste intervalo. Em fim,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4+3x^4}} = 0.$$

Segue pelo teste da série alternada que esta série é convergente, e como sua série de valores absolutos é divergente, ela é condicionalmente convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-m^4}$.

Solução:
Seja

$$f(x) = x^2 e^{-x^3},$$

do modo que o m-esimo termo desta série é

$$a_m = f(m).$$

A função f é positiva. Sua derivada é

$$f'(x) = x(2 - 3x^3)e^{-x^3}.$$

Como $f'(x)$ é negativa no intervalo $[1, \infty[$, a função f é decrescente neste intervalo. Em fim, utilizando a substituição

$$y = x^3,\ e$$
$$dy = 3x^2 dx,$$

temos

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\int_1^\infty e^{-y} dy = \frac{e^{-1}}{3}.$$

Como esta integral é finita, segue pelo teste da integral que esta série é convergente. Como todos os termos desta série são positivos, ela é absolutamente convergente.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a série de potências

$$f(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^m}{(m+1)^2}.$$

(a) Determine o intervalo de convergência desta série.

Solução:

A série é

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(m+1)^2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^m.$$

Ela é centrada em

$$c = -\frac{1}{2}.$$

O m-ésimo coeficiente é

$$c_m = \frac{2^m}{(m+1)^2}$$

O raio de convergência satisfaz

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{2^{m+1}(m+2)^2}{2^m(m+1)^2}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|2\frac{(m+2)^2}{(m+1)^2}\right| = 2.$$

Assim

$$R = \frac{1}{2}.$$

As extremidades do intervalo de convergência são então 0 e -1. Em $x=0$, a série é

$$f(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2},$$

que é convergente, pois é uma p-série com $p=2$. Em $x=-1$, a série é

$$f(-1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)^2},$$

que é absolutamente convergente, pois sua série de valores absolutos é uma p-série com $p=2$.

O intervalo de convergência é então $[-1,0]$.

(b) Determine $f^{(10)}(-1/2)$, a décima derivada de f em $-1/2$.

Solução:
Pelo teorema de Taylor,

$$f^{(10)}(-1/2) = 10!c_m = \frac{10!2^{10}}{11^2}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a seguinte EDO:

$$2(x-1)y'' + xy' + y = 0.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é ponto singular regular desta equação.

Solução:
A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= 2(x-1), \\ Q(x) &= x, \ e \\ R(x) &= 1. \end{aligned}$$

Como $P(1) = 0$, este ponto é ponto singular da equação. Como os limites

$$\begin{aligned} \alpha &:= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}, \ e \\ \beta &:= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

existem e são finitos, este ponto é ponto singular regular da equação.

(b) Determine as raízes da equação indicial desta equação.

Solução:
A equação de Euler associada é

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0.$$

Substituindo α e β nesta equação, temos

$$t^2 y'' + \frac{1}{2} t y' = 0.$$

A equação indicial desta equação de Euler é

$$r^2 - \frac{1}{2} r = 0,$$

e as raízes desta equação são 0 e 1/2.

(c) Determine a relação de recorrência da solução em séries associada à maior das duas raízes encontradas na parte (b).

Solução:
Substituimos primeiro $t := (x-1)$ de mode a tornar a equação em

$$2ty'' + (t+1)y' + y = 0.$$

A solução é

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+r}$$

com $a_0 \neq 0$. As derivadas são

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m t^{m+r-1}, \ e \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m t^{m+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$\begin{aligned} & 2t \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m t^{m+r-2} \\ & \qquad + (t+1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m t^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+r} = 0 \\ \therefore \quad & \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) a_m t^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m t^{m+r} \\ & \qquad + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m t^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+r} = 0 \\ \therefore \quad & \sum_{n=-1}^{\infty} 2(n+r+1)(n+r) a_{n+1} t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r} \\ & \qquad + \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0 \\ \therefore \quad & r(2r-1)a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)\big((2n+2r+1)a_{n+1} + a_n\big) t^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Taylor, temos, para todo $n \geq 0$,

$$(n+r+1)\big((2n+2r_1)a_{n+1} + a_n\big) = 0.$$

Substituindo $r = \frac{1}{2}$, obtemos, para todo $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
2(n+1)a_{n+1} + a_n &= 0 \\
\therefore \quad a_{n+1} &= \frac{-a_n}{2(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Utilize a transformada de Laplace para determinar a solução do problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = u_\pi(x)\text{sen}(x) + \delta_\pi(x)\cos(x) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

onde $u_\pi(x)$ é a função degrau unitário com singularidade em π e $\delta_\pi(x)$ é a função delta de Dirac com singularidade em π.

Solução:
Aplicando a transformada de Laplace ao lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 5y] &= \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] \\ &= s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 2s\mathcal{L}[y] - y(0) + 5\mathcal{L}[y] \\ &= (s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}[y] - 1. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace ao lado direito, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_\pi(x)\text{sen}(x) + \delta_\pi(x)\cos(x)] &= \mathcal{L}[u_\pi(x)\text{sen}((x-\pi)+\pi)] + \mathcal{L}[\delta_\pi(x)\cos(x)] \\ &= -\mathcal{L}[u_\pi(x)\text{sen}(x-\pi)] + e^{-\pi s}\cos(\pi) \\ &= -e^{-\pi s}\mathcal{L}[\text{sen}(x)] - e^{-\pi x}. \end{aligned}$$

Igualando os dois lados, temos então

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}[y] - 1 &= \frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1} - e^{-\pi s} \\ \therefore \quad \mathcal{L}[y] &= \frac{-e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} + \frac{1}{(s^2+2s+5)} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}. \end{aligned}$$

Temos

$$\frac{1}{(s^2+2s+5)} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x}\text{sen}(2x)].$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{-e^{-\pi s}}{(s^2+2s+5)} &= \frac{1}{2}e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-x}\text{sen}(2x)] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_\pi(x)e^{-(x-\pi)}\text{sen}(2(x-\pi))] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_\pi(x)e^{\pi}e^{-x}\text{sen}(2x)]. \end{aligned}$$

Aplicando a técnica de frações parciais, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} &= \frac{1}{10}\frac{(2-s)}{(s^2+1)} + \frac{1}{10}\frac{s}{(s^2+2s+5)} \\
&= -\frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{20}\frac{2}{(s+1)^2+4} \\
&= -\frac{1}{10}\mathcal{L}[\cos(x)] + \frac{1}{5}\mathcal{L}[\text{sen}(x)] + \frac{1}{10}\mathcal{L}[e^{-x}\cos(2x)] - \frac{1}{20}\mathcal{L}[e^{-x}\text{sen}(2x)] \\
&= \mathcal{L}[h],
\end{aligned}$$

onde

$$h(x) = -\frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{5}\text{sen}(x) + \frac{1}{10}e^{-x}\cos(2x) - \frac{1}{20}e^{-x}\text{sen}(2x).$$

Assim

$$\frac{-e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2s+5)} = -e^{-\pi s}\mathcal{L}[h(x)] = -\mathcal{L}[u_\pi(x)h(x-\pi)].$$

Segue que

$$\mathcal{L}[y] = -\mathcal{L}[u_\pi(x)h(x-\pi)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x}\text{sen}(2x)] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_\pi(x)e^{\pi}e^{-x}\text{sen}(2x)].$$

Assim

$$y = -u_\pi(x)h(x-\pi) + \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}u_\pi(x)e^{\pi}e^{-x}\text{sen}(2x).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A - Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\dfrac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta_a(t)f(t)$	$e^{-as}f(a)$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$