TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (3.0 pontos)
Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 3; \\ 7, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

Questão 2: (2.0 pontos)

(a) [1.5] Determine a série de Fourier em **cossenos** da função

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - x. \end{aligned}$$

(b) [0.5] Determine o valor da soma

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Questão 3: (2.0 pontos)
Encontre as autofunções e autovalores do problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' = \lambda y, \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Questão 4: (3.0 pontos)
Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = 4u(x,t) + u_{tt}(x,t) & x \in (0,1), t \in (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x(1-x) & x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO!

Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
$t^m\ (m\in\mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\|a\|$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s)-s^{m-1}f(0)-...-f^{(m-1)}(0)$

Integrais úteis.

$$\int x^m\cos(\alpha x)dx=\frac{x^m}{\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)-\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\operatorname{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m\operatorname{sen}(\alpha x)dx=-\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x)+\frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

O problema

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=0, y(L)=0\end{cases}$$

tem autovalores $\lambda=n^2\pi^2/L^2$, $n\in\mathbb{N}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$