TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (3.0 pontos)

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = g(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 4e^t \text{ se } 0 \leq t < 2, \\ 0 \text{ se } t \geq 2. \end{cases}$$

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace temos

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 4[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = G(s),$$

onde $Y(s)$ e $G(s)$ são, respectivamente, as transformadas de $y(t)$ e $g(t)$. Assim tem-se a relação

$$(s^2 - 4s + 3)Y(s) = G(s).$$

de onde segue a igualdade

$$Y(s) = \frac{G(s)}{(s^2 - 4s + 3)} = \frac{G(s)}{(s-1)(s-3)}.$$

Para calcular $G(s)$, observamos que $g(t)$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4e^t - 4u_2(t)e^t \\ &= 4e^t - 4e^2u_2(t)e^{t-2}, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}\left[4e^t\right](s) - \mathcal{L}\left[4e^2u_2(t)e^{t-2}\right](s) \\ &= \frac{4}{s-1} - e^{-2s}\mathcal{L}\left[4e^2e^t\right] \\ &= \frac{4}{s-1} - \frac{4e^2e^{-2s}}{s-1} \\ &= \frac{4}{s-1}\left(1 - e^{2-2s}\right) \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos concluir que

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s-3)}\left(1 - e^{2-2s}\right).$$

Pondo

$$H(s) := \frac{4}{(s-1)^2(s-3)},$$

temos então que

$$Y(s) = H(s) - e^{2-2s}H(s).$$

Logo, se $h(t) := \mathcal{L}^{-1}[H](t)$, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H](t) - e^2\mathcal{L}^{-1}[e^{-2s}H(s)](t) \\ &= h(t) - e^2u_2(t)h(t-2). \end{aligned}$$

Só resta calcular $h(t)$. Para isso, escrevemos $H(s)$ em frações simples, ou seja,

$$H(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s-3)} = \frac{1}{(s-3)} - \frac{1}{(s-1)} - \frac{2}{(s-1)^2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)} - \frac{1}{(s-1)} - \frac{2}{(s-1)^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2}\right] \\ &= e^{3t} - e^t - 2te^t. \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, a função definida por

$$f(x) = 2 - x.$$

(a) Determine a série de Fourier em cossenos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6, 6]$.

(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Solução:

(a) Para calcular a série de Fourier em cossenos de f usamos a extensão par e periódica de período $2L = 4$. Assim, a série de Fourier em cossenos de f é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right),$$

onde

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2-x)dx = 2,$$

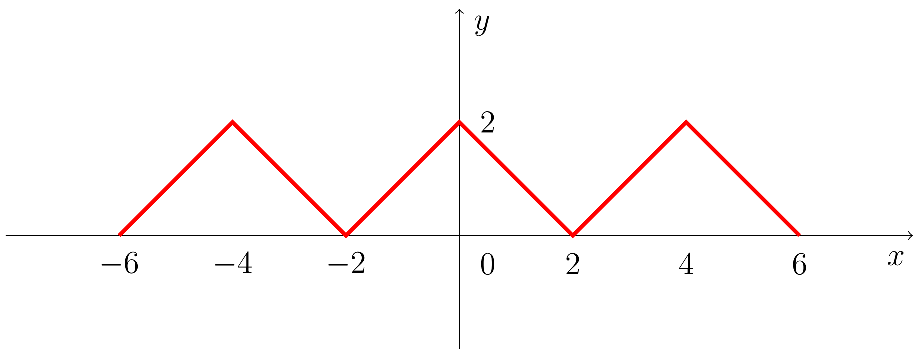
e, para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^2 (2-x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{2}{m\pi}(2-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{m\pi}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{-4}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{4(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Daí obtemos que a série de Fourier de f é dada pela expressão

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) O gráfico da série de Fourier obtida no item (a), no intervalo $[-6, 6]$ é o seguinte:



(c) Como a extensão par de f é continua em $x = 0$, segue do Teorema de Convergência de Fourier que

$$2 = f(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Assim obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Encontre as autofunções e autovalores do problema

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

(Dica: use a equação de Euler.)

Solução:
Procuramos soluções da forma $y = x^r$. Derivando y temos

$$y' = rx^{r-1} \quad \text{e} \quad y'' = r(r-1)^{r-2}.$$

Substituindo na equação obtemos as relações

$$r(r-1)x^r + rx^r + \lambda x^r = 0 \Leftrightarrow (r^2+\lambda)x^r = 0 \Leftrightarrow r^2 + \lambda = 0.$$

Há três possibilidades:

(a) $\boldsymbol{\lambda < 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada pela expressão

$$y(x) = ax^{\sqrt{|\lambda|}} + bx^{-\sqrt{|\lambda|}}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

As condições de contorno impõem as igualdades

$$y(1) = a + b = 0,$$
$$y(e) = ae^{\sqrt{|\lambda|}} + be^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0,$$

de onde temos que

$$b = -a,$$

e

$$\left(e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}}\right) a = 2\text{senh}(\sqrt{|\lambda|})a = 0.$$

Ou seja, não há soluções não-triviais e consequentemente não há autovalores positivos.

(b) $\boldsymbol{\lambda = 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada por

$$y(x) = a\ln(x) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições de contorno tem-se

$$y(1) = b = 0,$$
$$y(e) = a = 0,$$

logo $a = b = 0$. Portanto, que não há soluções não-triviais e 0 não é autovalor.

(c) $\boldsymbol{\lambda > 0}$. Nesse caso, a solução geral é dada por

$$y(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\ln(x)) + b\text{sen}(\sqrt{\lambda}\ln(x)) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

As condições de contorno impõem as seguintes restrições:

$$y(1) = a = 0,$$
$$y(e) = b\text{sen}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Portanto, existem soluções não-triviais se, e somente se, $\sqrt{\lambda} = m\pi$, por m inteiro positivo. Assim, as autovalores são

$$\lambda_m = m^2\pi^2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

e as autofunções correspondentes são dadas por

$$y_m(x) = \text{sen}(m\pi\ln(x)).$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) = u & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ (\pi - x) \text{ se } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Solução:

Aplicamos o método de separação de variáveis. Escrevemos então

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação, obtemos

$$X''(x)T(t) - X(x)T''(t) = X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1.$$

Como na última igauldade o lado esquerdo não depende de t e o lado direito não depende de x, ambos deverão ser iguais a uma constante real, que chamaremos de λ:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda,$$

de onde obtemos as equações

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{ e } T''(t) = (\lambda - 1)T(t).$$

Usando agora as condições de contorno homogéneas, temos que

$$\begin{aligned} X(0)T(t) = 0 \ \forall t > 0; \text{ portanto } X(0) = 0, \\ X(\pi)T(t) = 0 \ \forall t > 0; \text{ portanto } X(\pi) = 0, \\ X(x)T'(t) = 0 \ \forall x \in]0,\pi[; \text{ portanto } T'(0) = 0. \end{aligned}$$

Como temos duas condições de contorno em X, procuramos soluções do problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = 0 \text{ e } X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a fórmula com $L = \pi$, vemos que os autovalores de esse problema são $\lambda_m = -m^2$, $m \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções são

$$X_m(x) = \text{sen}(mx).$$

Resolvendo a correspondente equação de T temos que

$$\begin{aligned} T''_m(t) &= -(m^2+1)T_m(t) \\ T'_m(0) &= 0. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$T_m(t) = b_m \cos(\sqrt{(m^2+1)}t).$$

Segue pelo principio de superposição que a solução geral é dada por

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}(mx)\cos(\sqrt{(m^2+1)}t).$$

Usando agora as condições iniciais deverá ser satisfeita a relação

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}(mx) = f(x).$$

Assim, pelas fórmulas de Euler-Fourier para séries de Fourier em senos tem-se

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sen}(mx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\text{sen}(mx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\text{sen}(mx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{m}\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\text{sen}(mx)\right]_0^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi - x)}{m}\cos(mx) - \frac{1}{m^2}\text{sen}(mx)\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi m^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a solução:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi m^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\text{sen}(mx)\cos(\sqrt{(m^2+1)}t).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Para $a = \lambda + i\mu$ complexo, e para x real positivo,

$$x^a = x^\lambda \cos(\mu \log(x)) + i x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \log(x)).$$

B : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1.$$

C : Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}, \ s > 0$
$t^m \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}}, \ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$t^m e^{at} \ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$