TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ 0 \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6,6]$.

(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução diferente de zero.

$$\begin{cases} u_{xx} &= \lambda u, \\ u(0) &= 0, \\ u_x(2) &= 0. \end{cases}$$

Questão 3: (3.0 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & x \in]0,2[, \ t \in]0,\infty[, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,2]. \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ (2-x) \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_{xy} + u_y = 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\left\{ y_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \ m \geq 1. \right.$$