TEMPO DE PROVA: 2h30

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \le x < 1, \\ 0 \text{ se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

Solução:
Calculamos a série de Fourier em senos utilizando a extensão ímpar $\tilde{f}$ de f. Assim, pelas fórmulas de Euler-Fourier, temos

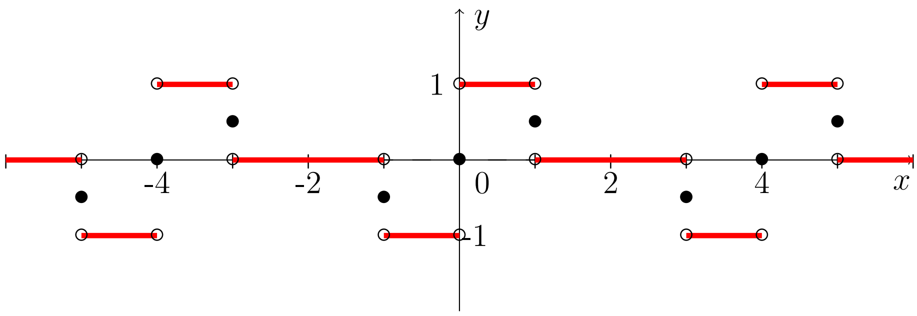
$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^2 f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^1 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{-2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{2}{m\pi}. \end{aligned}$$

Segue que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{m\pi} - \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6,6]$.

Solução:



(c) Calcule o valor da série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)}.$$

Solução:
Pelo teorema de convergência de Fourier,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} - \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi}\mathrm{sen}(m\pi) = \frac{1}{2} \\
\therefore\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
\therefore\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
\therefore\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\mathrm{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
\therefore\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4} \\
\therefore\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte problema de EDO com condições de contorno tem ao menos uma solução diferente de zero.

$$\begin{cases} u_{xx} &= \lambda u, \\ u(0) &= 0, \\ u_x(2) &= 0. \end{cases}$$

Solução:
Há três casos a serem estudados.

$\lambda > 0$: Neste caso, a solução geral é

$$\begin{aligned}
& u(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x) \\
\therefore\ & u_x(x) = A\sqrt{\lambda}\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cosh(\sqrt{\lambda}x).
\end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u(0) &&= 0 \\ \therefore\ & A &&= 0. \\ & u_x(2) &&= 0 \\ \therefore\ & B\sqrt{\lambda}\cosh(2\sqrt{\lambda}) &&= 0 \\ \therefore\ & B &&= 0. \end{aligned}$$

Assim não há soluções não triviais quando $\lambda > 0$.

$\lambda = 0:$ Neste caso, a solução geral é

$$\begin{aligned} & u(x) &&= Ax + B \\ \therefore\ & u_x(x) &&= A. \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u(0) &&= 0 \\ \therefore\ & B &&= 0. \\ & u_x(2) &&= 0 \\ \therefore\ & A &&= 0. \end{aligned}$$

Assim não há soluções não triviais quando $\lambda = 0$.

$\lambda < 0:$ Neste caso, a solução geral é

$$\begin{aligned} & u(x) &&= A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}x) \\ \therefore\ & u_x(x) &&= -A\sqrt{|\lambda|}\text{sen}(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|}x). \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & u(0) &&= 0 \\ \therefore\ & A &&= 0. \\ & u_x(2) &&= 0 \\ \therefore\ & B\sqrt{|\lambda|}\cos(2\sqrt{|\lambda|}) &&= 0. \end{aligned}$$

Segue que existe uma solução não trivial se e somente se

$$\begin{aligned} & \cos(2\sqrt{|\lambda|}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{|\lambda|} &&= \frac{(2m+1)\pi}{2},\ m \text{ inteiro},\ m \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda &&= -\frac{(2m+1)^2\pi^2}{16},\ m \text{ inteiro},\ m \geq 0 \end{aligned}$$

Segue que os valores de λ para os quais existe ao menos uma solução diferente de zero são

$$\left\{ -\frac{(2m+1)^2\pi^2}{16} \;\middle|\; m \text{ inteiro},\ m \geq 0 \right\}.$$

Questão 3: (3.0 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & x \in]0,2[, \ t \in]0,\infty[, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,2]. \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ (2-x) \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solução:

Determinamos primeiro o problema separado. Substituindo $u(x,t) := X(x)T(t)$ na equação a derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned} & (XT)_t - (XT)_{xx} + XT = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & XT' - X''T + XT \quad = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} + 1 \quad = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{X''}{X} \quad = 1 + \frac{T'}{T} \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo é constante em t e como o lado direito é constante em x, os dois são iguais à mesma constante λ. Assim

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X, \\ T' &= (\lambda - 1)T. \end{aligned}$$

Substituindo nas condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & X(0)T(t) = 0 \ \forall t \\ \Rightarrow \quad & X(0) \quad = 0. \\ & X(2)T(t) = 0 \ \forall t \\ \Rightarrow \quad & X(2) \quad = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores e as autofunções do problema

$$\begin{aligned} & X'' = \lambda X, \\ & X(0) = X(2) = 0. \end{aligned}$$

são

$$\lambda_m = -\frac{m^2\pi^2}{4}$$
$$X_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right),$$

para $m \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. Substituindo λ_m na equação para T, temos

$$T'_m(t) = -\left(\frac{m^2\pi^2}{4} + 1\right)T_m(t)$$
$$\therefore \quad T_m(t) = b_m e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{4}+1\right)t}.$$

As soluções separáveis são então

$$u_m(x,t) = b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{4}+1\right)t}.$$

Segue pelo princípio de superposição que a solução geral do problema homogênea é

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{4}+1\right)t}.$$

Substituindo nas condições iniciais, temos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

Como essa série é uma série de Fourier em senos, utilizamos a extensão ímpar $\tilde{f}$ de f e pelas fórmulas de Euler-Fourier temos

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^2 f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \left[-\frac{2x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&\quad + \left[-\frac{2(2-x)}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \left[\frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \left[\frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{8}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{m^2\pi^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{4}+1\right)t}.$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Encontre todas as soluções u da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ do problema

$$u_x + u_{xy} + u_y = 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solução:

Substituindo para u na equação temos

$$\begin{aligned}
& (XY)_x + (XY)_{xy} + (XY)_y = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X'Y + X'Y' + XY' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{X'}{X} + \frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + \frac{Y'}{Y} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 + \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} + \frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(1 + \frac{X'}{X}\right)\left(1 + \frac{Y'}{Y}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Em particular, temos

$$\left(1 + \frac{X'}{X}\right), \left(1 + \frac{Y'}{Y}\right) \neq 0$$

e

$$\left(1 + \frac{X'}{X}\right) = \left(1 + \frac{Y'}{Y}\right)^{-1}.$$

Como o lado esquerdo é constante em y e como o lado direito é constante em x, os dois são iguais à mesma constante $\lambda \neq 0$. Isto é

$$\left(1 + \frac{X'}{X}\right) = \lambda,$$
$$\left(1 + \frac{Y'}{Y}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Segue que

$$X' = (\lambda - 1)X,$$
$$Y' = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)Y.$$

Assim

$$X = Ae^{(\lambda-1)x}$$
$$Y = Be^{(1/\lambda-1)y}$$

Segue que as soluções seperáveis do problema são

$$u(x,y) = Ce^{(\lambda-1)x+(1/\lambda-1)y},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são constantes.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(0) = 0, y(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -m^2\pi^2/L^2$**,** $m \in \{1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\left\{ y_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),\ m \geq 1. \right.$$