TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)
Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial em torno do ponto $x = 0$.

(c) Seja $y(x)$ a solução dada em série de potências, em torno de $x = 0$, correspondente à maior raíz da equação indicial. Determine a relação de recorrência dos coeficientes dessa solução.

Questão 2: (2.5 pontos)
Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e} \\ (2 - x) \quad \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier, obtida no item (a), no intervalo $[-2, 2]$.

(c) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a função f, definida pela série de potências

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{n3^n}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência dessa série.

(b) Calcule o valor de $f^{(5)}(1)$ (derivada de ordem 5 da função f em $x = 1$).

Questão 4: (2.5 pontos)
Determine a solução $u(x, t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0) = x(\pi - x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Integrais úteis.

$$\int x^m \cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\text{sen}(\alpha x) - \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\text{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m \text{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

B : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$**,** $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1. \end{cases}$$