TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)
Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial em torno do ponto $x = 0$.

(c) Seja $y(x)$ a solução dada em série de potências, em torno de $x = 0$, correspondente à maior raíz da equação indicial. Determine a relação de recorrência dos coeficientes dessa solução.

Solução:

(a) A equação é dada na forma $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, onde

$$P(x) = 3x^2, \quad Q(x) = 2x \quad \text{e} \quad R(x) = x^2.$$

Como $P(0) = 0$, então $x = 0$ é ponto singular da equação. Por outro lado, as funções

$$q(x) := \frac{xQ(x)}{P(x)} = \frac{2}{3} \text{ e}$$
$$r(x) := \frac{xR(x)}{P(x)} = \frac{x^2}{3}.$$

são analíticas em $x = 0$; logo, esse $x = 0$ é ponto singular regular da equação.

(b) A equação de Euler associada é a seguinte:

$$y'' + q(0)y' + r(0)y = 0 \Leftrightarrow 3y'' + 2y' = 0$$

e, consequentemente, a equação indicial é dada por

$$3r(r-1) + 2r = 0 \Leftrightarrow r\big(3r-1\big) = 0.$$

Assim, as duas raízes da equação indicial são 0 e $\frac{1}{3}$.

(c) A solução em série que procuramos é da forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1/3}.$$

Portanto,

$$y'(x) = x^{\frac{1}{3}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \tfrac{1}{3}\right) a_m x^{m-1} \quad \text{e}$$
$$y''(x) = x^{\frac{1}{3}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \tfrac{1}{3}\right)\left(m - \tfrac{2}{3}\right) a_m x^{m-2}.$$

Substituindo na equação, temos as seguintes igualdades equivalentes:

$$3x^{2+\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\tfrac{1}{3}\right)\left(m-\frac{2}{3}\right)a_m x^{m-2}+2x^{1+\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\tfrac{1}{3}\right)a_m x^{m-1}+x^{2+\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}3\left(m+\tfrac{1}{3}\right)\left(m-\tfrac{2}{3}\right)a_m x^m+x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}2\left(m+\tfrac{1}{3}\right)a_m x^m+x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+2}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}3\left(m+\tfrac{1}{3}\right)\left(m-\tfrac{2}{3}\right)a_m x^m+x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=0}^{\infty}2\left(m+\tfrac{1}{3}\right)a_m x^m+x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2} x^{m}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$4a_1x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\sum_{m=2}^{\infty}\left[m(3m+1)a_m+a_{m-2}\right]x^m=0,$$

de eonde decorre a relação de recorrência

$$a_1=0 \quad \text{e}$$
$$a_m=\frac{-a_{m-2}}{m(3m+1)}, \quad \forall\, m\geq 2.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{se } 0\leq x\leq 1 \text{ e}\\ (2-x) & \text{se } 1<x\leq 2.\end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier em senos de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier, obtida no item (a), no intervalo $[-2,2]$.

(c) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$.

Solução:

(a) Pelas equações de Euler/Fourier, para séries de Fourier em senos, para todo $m \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\begin{aligned}
b_m &= \int_0^2 f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left(\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{m\pi(2-x)}{2}\right)\right)dx \\
&= \left(1+(-1)^{m+1}\right)\int_0^1 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \\
&= \left(1+(-1)^{m+1}\right)\left(\left[\frac{-2x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx\right) \\
&= \left(1+(-1)^{m+1}\right)\left(\frac{-2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \left[\frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1\right) \\
&= \left(1+(-1)^{m+1}\right)\left(\frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Portanto, se m é par ($m = 2k$),

$$1+(-1)^{m+1} = 0$$

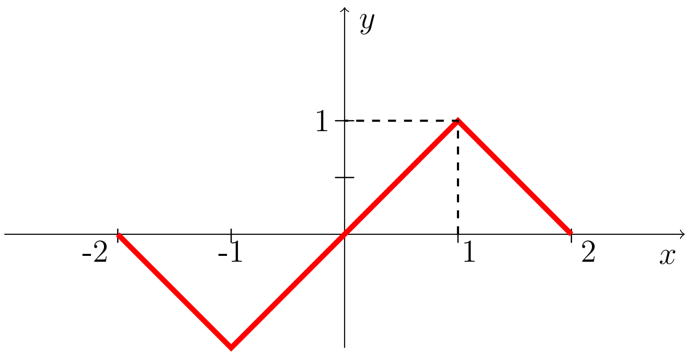
e se m é ímpar ($m = 2k+1$) tem-se

$$1+(-1)^{m+1} = 2, \quad \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = (-1)^k \quad \text{e} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0.$$

Daí obtemos que a sétie fourier em senos de $f(x)$ é dada pela expressão

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

(b) O gráfico da série de Fourier obtida no item (a), no intervalo $[-2, 2]$, é o seguinte:



(c) Como f é contínua em $x = 1$, segue do Teorema de Convergência de Fourier que

$$1 = f(1) = F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2},$$

de onde concluímos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a função f, definida pela série de potências

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n3^n}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência dessa série.

(b) Calcule o valor de $f^{(5)}(1)$ (derivada de ordem 5 da função f em $x = 1$).

Solução:

(a) Essa série é centrada no ponto $x = 1$. O n-ésimo termo é

$$a_n = \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n3^n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \frac{n3^n}{|x-1|^n} \\ &= \frac{|x-1|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{|x-1|}{3}. \end{aligned}$$

Pelo teste da razão temos que essa série converge absolutamente se $|x-1| < 3$ e diverge se $|x-1| > 3$. Assim, o raio de convergência é $R = 3$. No ponto $x = -2$ a série é dada por

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (-3)^m}{m3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m},$$

a qual é divergente pois é a série harmônica. Por outro lado, em $x = 4$ a série é dada pela expressão

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 3^m}{m3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m},$$

que é uma série convergente, visto que é a série harmônica alternada. O intervalo de convergência é então $(-2, 4]$.

(b) Pelo teorema de Taylor,

$$\frac{f^{(5)}(1)}{5!} = \frac{(-1)^5}{5 \cdot 3^5}.$$

Portanto, $f^{(5)}(1) = -\dfrac{8}{81}$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0) = x(\pi - x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Solução:

Separando variáveis, temos que $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação a expressão anterior obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(x)}.$$

Como o lado esquerdo só depende de x e como o lado direito só depende de t, os dois deverão ser iguais a um mesmo valor constante, que denotamos por λ. Isto é,

$$X''(x) = \lambda X(x) \text{e} \quad T''(t) = \lambda T(t).$$

Das condições de contorno homogêneas e da condição inicial obtemos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} & X'(0)T(t) = 0 \quad \forall\, t, \\ \therefore \quad & X'(0) = 0. \\ & X'(\pi)T(t) = 0 \quad \forall\, t, \\ \therefore \quad & X'(\pi) = 0. \\ & X(x)T(0) = 0 \quad \forall\, 0 < x < \pi, \\ \therefore \quad & T(0) = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores do problema em X são $\lambda_m = -m^2$, para $m \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e as autofunções correspondentes são

$$X_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } m = 0 \quad \text{e} \\ \cos(mx) \text{ e } m > 0. \end{cases}$$

Substituindo na equação para T obtemos

$$\begin{cases} T_m''(t) = -m^2 T_m(t) \\ T_m(0) = 0, \end{cases}$$

de onde decorrem as seguintes expressões para T_m:

$$T_m(t) = \begin{cases} b_0 t \text{ se } \quad m = 0 \text{ e} \\ b_m \text{sen}(mt) \text{ se } m > 0. \end{cases}$$

As correspondentes soluções em variáveis separadas são dadas por

$$u_m(x,t) = \begin{cases} b_0 t \text{ se } m = 0 \quad \text{e} \\ b_m \cos(mx)\text{sen}(mt) \text{ se } m > 0. \end{cases}$$

A solução geral é dada então por

$$u(x,t) = b_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos(mx)\text{sen}(mt)$$
$$\therefore \quad u_t(x,t) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos(mx)\cos(mt)$$
$$\therefore \quad u_t(x,0) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos(mx).$$

Daí, pelas fórmulas de Euler-Fourier para séries de Fourier em cossenos, obtemos os coeficientes b_m da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
2b_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{3}. \\
mb_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(mx)dx \\
&= \frac{2}{m\pi}\left[x(\pi - x)\text{sen}(mx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\text{sen}(mx)dx \\
&= \frac{2}{m^2\pi}\left[(\pi - 2x)\cos(mx)\right]_0^{\pi} + \frac{4}{m^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(mx)dx \\
&= -\frac{2}{m^2}\left((-1)^m + 1\right) + \frac{4}{m^3\pi}\left[\text{sen}(mx)\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{m^2}\left((-1)^m + 1\right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$u(x,t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^3}\cos(2kx)\text{sen}(2kt).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Integrais úteis.

$$\int x^m \cos(\alpha x)dx = \frac{x^m}{\alpha}\text{sen}(\alpha x) - \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\text{sen}(\alpha x)dx$$
$$\int x^m \text{sen}(\alpha x)dx = -\frac{x^m}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{m}{\alpha}\int x^{m-1}\cos(\alpha x)dx$$

B : O problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(0) = 0, y'(L) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$**,** $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$**, e as autofunções correspondentes são**

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ n \geq 1. \end{cases}$$