TEMPO DE PROVA: 2h

Questão 1: (2.5 pontos)
Considere a série de potências:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m (x-1)^{m+1}}{m\sqrt{m^2+1}}.$$

(a) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência dessa série.

(b) Encontre $f^{(10)}(1)$, isto é, a derivada de ordem 10 da função f em $x = 1$.

Solução:

(a) O m'ésimo termo da série é

$$a_m = \frac{2^m (x-1)^{m+1}}{m\sqrt{m^2+1}}.$$

Aplicando o teste de razão, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| &= \lim_{m\to+\infty} \left| \frac{2^{m+1}(x-1)^{m+2}}{(m+1)\sqrt{(m+1)^2+1}} \cdot \frac{m\sqrt{m^2+1}}{2^m(x-1)^{m+1}} \right| \\
&= \lim_{m\to+\infty} 2\,|x-1|\, \frac{m}{m+1} \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+2m+2}} \\
&= 2\,|x-1|\,.
\end{aligned}$$

Segue pelo teste de razão que a série é convergente para $|x-1| < 1/2$ e divergente para $|x-1| > 1/2$. Assim, o raio de convergência é $1/2$. Para determinar o intervalo de convergência, estudamos a série em cada extremidade. Em $x = 3/2$, temos

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m 2^{-(m+1)}}{m\sqrt{m^2+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m\sqrt{m^2+1}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^2}.$$

Como a série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^2}$ é uma p-série cm $p = 2$, essa série é convergente. Segue pelo teste de comparação que a série de potências é convergente em $x = 3/2$. Por fim, em $x = 1/2$, temos

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m (-1)^{m+1} 2^{-(m+1)}}{m\sqrt{m^2+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m\sqrt{m^2+1}}.$$

Segue pelo caso precedente que essa série é absolutamente convergente. Assim, o intervalo de convergência é $[1/2, 3/2]$.

(b) A função é

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m (x-1)^{m+1}}{m\sqrt{m^2+1}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)\sqrt{(m-1)^2+1}}.$$

Segue pelo teorema de Taylor que

$$f^{(10)}(1) = \frac{10!2^9}{9\sqrt{82}}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } -2 \leq x < -1, \\ x \text{ se } -1 \leq x < 1, \text{ e} \\ 0 \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida no item (a) no intervalo $[-6,6]$.

Solução:

(a) A função é periódica com periódo $2L = 4$. A série de Fourier de f é então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right).$$

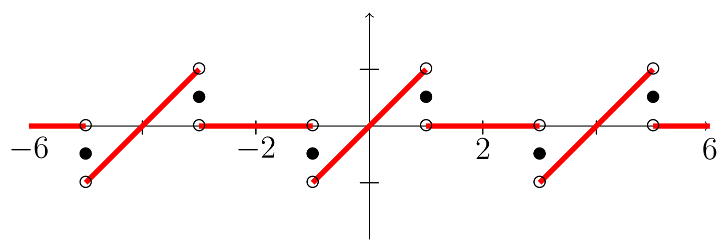
Como f é impar, $a_m = 0$ para todo m. Logo,

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 x\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{-2x}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{-2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \left[\frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{-2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

A série de Fourier de f é então

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-2)}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{4}{m^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{2k\pi}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{2k\pi x}{2}\right) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\text{sen}\,(k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) O grafico da série de Fourier de f é



Questão 3: (2.5 pontos)
Considere a equação de Chebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 1$ é ponto singular regular.

(b) Determine as raízes da equação indicial no ponto $x = 1$.

(c) Determine a fórmula de recorrência para os coeficientes da série de potências em torno de $x = 1$ da solução $y(x)$ que corresponde à *maior* das duas raízes da equação indicial.

(d) Determine os 3 primeiros termos não nulos da solução $y(x)$ encontrada no item (c) e que, além disso, satisfaz $\lim_{x\to 1^+} y(x)/\sqrt{x-1} = 1$.

Solução:

(a) A equação é

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

onde

$$P(t) = 1 - x^2, \qquad Q(t) = -x, \qquad R(t) = 4.$$

Como $P(1) = 0$, o ponto $x = 1$ é ponto singular da equação. Logo, temos

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{-(x-1)x}{(1-x^2)} = \lim_{x\to 1+} \frac{(1-x)x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} =: a.$$

e

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{4(1-x)^2}{(1-x^2)} = \lim_{x\to 1+} \frac{4(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} = 0 =: b.$$

Como esses limites existem, $x = 1$ é ponto singular regular da equação.

(b) A equação de Euler associada é

$$(x-1)^2y'' + a(x-1)y' + by = 0.$$

onde a e b são os limites determinados em cima. Istó é,

$$(x-1)^2y'' + \frac{1}{2}(x-1)y' = 0.$$

Substituindo $y = (x-1)^r$, temos

$$(x-1)^2 r(r-1)(x-1)^{r-2} + \frac{1}{2}(x-1)r(x-1)^{r-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad (x-1)^r r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Assim, as raízes da equação indicial são 0 é $\frac{1}{2}$.

(c) Substituindo $t = (x-1)$, temos

$$-t(t+2)y'' - (t+1)y' + 4y = 0.$$

A solução tem a forma

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+\frac{1}{2}} \\ \therefore \quad y' &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+\frac{1}{2}\right) a_m t^{m-\frac{1}{2}} \\ \therefore \quad y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right) a_m t^{m-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$\begin{aligned} & -(t^2+2t)\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)a_m t^{m-\frac{3}{2}} \\ & \quad -(t+1)\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m t^{m-\frac{1}{2}} + 4\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+\frac{1}{2}} && = 0 \\ \therefore \quad & -\sum_{m=0}^{\infty}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)a_m t^{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=0}^{\infty} 2\left(m^2-\frac{1}{4}\right)a_m t^{m-\frac{1}{2}} \\ & \quad -\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m t^{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m t^{m-\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m t^{m+\frac{1}{2}} && = 0 \\ \therefore \quad & -\sum_{m=0}^{\infty}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)a_m t^{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=-1}^{\infty} 2\left((m+1)^2-\frac{1}{4}\right)a_{m+1} t^{m+\frac{1}{2}} \\ & \quad -\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m t^{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=-1}^{\infty}\left((m+1)+\frac{1}{2}\right)a_{m+1} t^{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m t^{m+\frac{1}{2}} && = 0 \\ \therefore \quad & \left(\frac{a_0}{2}-\frac{a_0}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)a_m - 2\left((m+1)^2-\frac{1}{4}\right)a_{m+1}\right. \\ & \quad \left. -\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m - \left(m+\frac{3}{2}\right)a_{m+1} + 4a_m\right]t^{m+\frac{1}{2}} && = 0. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, temos, para todo m,

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{4} - m - m^2\right)a_m &= \left(2m^2+5m+3\right)a_{m+1} \\ \therefore \qquad a_{m+1} &= \frac{15-4m-4m^2}{4(2m+3)(m+1)}a_m. \end{aligned}$$

(d) Calculando o limite, temos

$$\lim_{x\to 1+}\frac{y(x)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 0+}\frac{y(t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0+}\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = a_0.$$

Temos então $a_0 = 1$. Logo
$$a_1 = \frac{15}{12}a_0 = \frac{5}{4}.$$
e
$$a_2 = \frac{7}{40}a_1 = \frac{7}{32}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Resolva o problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \mathrm{sen}(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução:
A transformada de Laplace do lado esquerdo é
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y] &= \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] \\ &= (s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) + 2(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] \\ &= (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y] - (s+1) - 1 \\ &= ((s+1)^2 + 1)\mathcal{L}[y] - (s+1) - 1\end{aligned}$$
A transformada de Laplace do lado direito é
$$\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{s^2+1} - e^{-\frac{\pi s}{2}}.$$
Igualando os dois lados, temos então
$$\mathcal{L}[y] = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{((s+1)^2+1)(s^2+1)} - \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{(s+1)^2+1}.$$
Usando a tecnica de frações parciais, temos
$$\begin{aligned}\frac{1}{((s+1)^2+1)(s^2+1)} &= \frac{2s+3}{5((s+1)^2+1)} + \frac{-2s+1}{5(s^2+1)} \\ &= \frac{2(s+1)}{5((s+1)^2+1)} + \frac{1}{5((s+1)^2+1)} + \frac{-2s}{5(s^2+1)} + \frac{1}{5(s^2+1)}. \\ &= \frac{2}{5}\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(t)\right] + \frac{1}{5}\mathcal{L}\left[e^{-t}\mathrm{sen}(t)\right] + \frac{-2}{5}\mathcal{L}\left[\cos(t)\right] + \frac{1}{5}\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(t)\right].\end{aligned}$$
Em fim, temos
$$\begin{aligned}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} &= \mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(t)\right] \\ \frac{1}{(s+1)^2+1} &= \mathcal{L}\left[e^{-t}\mathrm{sen}(t)\right] \\ \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{(s+1)^2+1} &= \mathcal{L}\left[u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Assim, temos

$$y = e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t) + \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) + \frac{1}{5}e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$
$$+ \frac{-2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(t) + u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

A : Transformadas de Laplace elementares.

f	$\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^m\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{s^{m+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^m e^{at}\ (m \in \mathbb{N})$	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}},\ s > a$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{at}f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)$