UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo IV - 2017/2 - 30/11/2017

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \ln x$ centrada em $x = 1$.

(b) Calcule como uma série de potência a integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x-1}dx$ centrada em $x = 1$.

Questão 2: (2,5 pontos) Considere a equação

$$x(2-x)y'' + (x+2)y' + 2y = e^{x-1}.$$

(a) Mostre que $x_0 = 1$ é um ponto ordinário dessa equação.

(b) Determine a relação de recorrência da solução em séries dessa equação em torno desse ponto.

(c) Determine uma cota inferior para o raio de convergência da série encontrada em (b).

Questão 3: (2,5 pontos)

(a) Determine a série de Fourier em cossenos da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ (x-1)^2 \text{ se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico da série de Fourier obtida em (a) no intervalo $[-6, 6]$.

(c) Calcule o valor da série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}$.

Questão 4: (2.5 pontos)
Encontre a solução $u : [0,4] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = u & (x,t) \in (0,4) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \ u_x(4,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,4]. \end{cases}$$

onde $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ é a função $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x < 2 \\ 0 \text{ se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.
FÓRMULAS ÚTEIS NO VERSO!

ALGUMAS FORMULAS ÚTEIS

A. A série de Taylor da função exponencial centrada no $x = 0$ é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

B. O problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y'(4) = 0, \end{cases}$$

tem autovalores $\lambda_n = \pi^2 \left(\dfrac{2n-1}{8}\right)^2$, $n \in \{1, 2, 3, ...\}$, e as autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{8}\right), \ n \geq 1.$$