Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$(\mathcal{E}) \quad y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0\,.$$

(**a**) [0.5 ponto] Provar que o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário da equação $(\mathcal{E})$.

(**b**) [2 pontos] Achar, na forma de uma série de potências, a solução $y(x)$ de $(\mathcal{E})$ que satisfaz $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$. Calcular o raio de convergência R dessa solução.

Solução:

(**a**) Podemos escrever a equação $(\mathcal{E})$ na forma $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$, onde $P(x) = 1$, $Q(x) = -x$ e $R(x) = -1$ são polinômios e portanto funções analíticas. Além disso vale que $P(0) = 1 \neq 0$. Logo, o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação $(\mathcal{E})$.

(**b**) Procuramos a solução y na forma de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Temos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Substituindo essas relações na equação $(\mathcal{E})$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\,,$$

ou seja

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n\Big]x^n = 0\,.$$

Da unicidade do desenvolvimento em série de potências, deduzimos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0, \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0,\ n \geq 1\,, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = \frac{a_0}{2}, \\ a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2},\ n \geq 1\,. \end{cases}$$

Por outro lado, usando as condições iniciais, temos que

$$y(0) = a_0 = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = a_1 = 0\,.$$

Usando a realção de recorrência, calculamos os termos pares:

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4}, \quad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}, \ \cdots\ , \ a_{2k} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k} = \frac{3}{2^k k!},\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Por outro lado, como $a_1 = 0$, temos que $a_{2k+1} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Em conclusão, a solução procurada é dada por

$$y(x) = 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!},\ x \in (-R, R)\,.$$

Para calcular o raio de convergência R, usamos o teste da razão, isto é

$$\left|\frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}}\right| = \frac{2^k k!}{2^{k+1}(k+1)!} = \frac{1}{2(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{logo} \quad R = \frac{1}{0} = +\infty\,.$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Achar a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ com $f(0) = 1$ que satisfaz a seguinte equação:

$$f'(t) - \int_0^t \cos(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = 1, \quad \forall t \geq 0\,.$$

Solução:
Aplicando a transformada de Laplace à equação, fazendo uso das fórmulas (1), (9) e (10) da tabela anexada, obtemos a equação algébrica

$$\frac{1}{s} = \mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[f'](s) - \mathcal{L}\Big[\int_0^t \cos(\tau) f(t-\tau)\, d\tau\Big](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) - \mathcal{L}[\cos t](s) \cdot \mathcal{L}[f](s)\,.$$

Além disso, como $f(0) = 1$, deduzimos da fórmula (5) que

$$\Big(s - \frac{s^3}{s^2+1}\Big)\mathcal{L}[f](s) - 1 = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4}\,.$$

Portanto, concluimos da fórmula (3) que a solução procurada é:

$$f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de período 2π tal que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ para todo $x \in (0, \pi]$.

(**a**) [0.5 ponto] Sabendo que f é uma função ímpar, determine a expressão de f no intervalo $[-\pi, 0]$.

(**b**) [1 ponto] Determine a série de Fourier da função f.

(**c**) [1 ponto] Usando o item (b), calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n}$. Justifique sua resposta.

Solução:
(**a**) Como f é ímpar $f(0) = 0$. Por outro lado, se $x \in [-\pi, 0)$ então $-x \in (0, \pi]$. Logo, pela imparidade de f segue que $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi + x}{2}$ para todo $x \in [-\pi, 0)$.

(**b**) Como f é ímpar a série de Fourier dela é dada pela expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Para cada número natural $n \geq 1$ calculamos o coeficiente de Fourier b_n usando integração por partes uma única vez. Isto é,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \\ &= -\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right], \end{aligned}$$

e portanto

$$b_n = -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^\pi = \frac{1}{n}.$$

Finalmente, a série de Fourier de f é dada pela expressão $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

(**c**) Observamos que as funções f e f' são seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo teorema de convergência de Dirichlet para a série de Fourier, vale que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n},$$

em todo ponto de continuidade da função f. Portanto, como f é contínua em $x = 1$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Encontrar uma solução do problema de Neumann no retângulo descrito a seguir

$$(\mathcal{N}) \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le \pi, \\ u_y(x,0) = \cos x, & 0 \le x \le \pi, \\ u_y(x,\pi) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Solução:

Comecemos procurando soluções não triviais de

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ u_y(x,\pi) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

na forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Da equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

em que λ é a constante de separação (ou autovalor). Das condições de contorno, $u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0$, temos $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Resta-nos achar a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

A solução deste problema é dada pela família de constantes $\lambda_n = n^2$ e respectivas autofunções $X_n(x) = C_n \cos(nx)$, sendo C_n constante e $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Para cada λ_n, temos uma função $Y_n(y)$ e ela deve satisfazer $Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0$, isto é, $Y_n(y) = D_n \text{senh}\,(ny) + E_n \cosh\,(ny)$, sendo D_n e E_n constantes e $n = 0, 1, 2, \ldots$. Para $n = 1, 2, \ldots$, usando a condição de contorno $u_y(x, \pi) = 0$, obtemos $Y_n'(\pi) = 0$ e consequentemente

$$Y_n'(\pi) = nD_n \cosh\,(n\pi) + nE_n \text{senh}\,(n\pi) = 0, \quad \Rightarrow \quad E_n = -\frac{1}{\text{tgh}(n\pi)} D_n, \; n = 1, 2, \cdots .$$

Temos assim que

$$Y_0(y) = D_0 = \text{Cte}, \quad \text{e} \quad Y_n(y) = D_n \left(\text{senh}\,(ny) - \frac{1}{\text{tgh}(n\pi)} \cosh\,(ny) \right) \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Portanto, usando o princípio da superposição,

$$u(x, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \left(\text{senh}\,(ny) - \frac{1}{\text{tgh}(n\pi)} \cosh\,(ny) \right) \cos\,(nx)\,,$$

em que $N \geqslant 1$ é finito, é uma solução da equação de Laplace que satisfaz $u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0$ e $u_y(x, \pi) = 0$. Notemos que

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{N} nA_n \left(\cosh\,(ny) - \frac{1}{\text{tgh}(n\pi)} \text{senh}\,(ny) \right) \cos\,(nx) \quad \Rightarrow \quad u_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} nA_n \cos\,(nx)\;.$$

Em particular, para que tenhamos $u_y(x, 0) = \cos\,(x)$, devemos ter $A_1 = 1$ e $A_n = 0$ se $n > 1$. Temos então como solução

$$u(x, y) = A_0 + \left(\text{senh}\,(y) - \frac{1}{\text{tgh}(\pi)} \cosh\,(y) \right) \cos\,(x)\,.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas e meia

Regras:

- Não é permitida consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala durante a prova
- Todo o material do aluno, com exceção de documento de identidade, lápis, caneta, régua, borracha deve ficar junto à mesa do professor
- Calculadoras, aparelhos celulares e similares devem ficar desligados na bolsa/mochila do aluno junto à mesa do professor
- O aluno deve apresentar o documento de identificação quando for assinar a folha de presença.
- A prova pode ser feita com lápis e/ou caneta.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

(1) $\mathcal{L}\left[1\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

(2) $\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \dfrac{1}{s-a}$.

(3) $\mathcal{L}\left[t^n\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

(4) $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} at\right](s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

(5) $\mathcal{L}\left[\cos at)\right](s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$.

(6) $\mathcal{L}\left[\delta(t-c)\right](s) = e^{-cs}$.

(7) $\mathcal{L}\left[u_c(t)\, f(t-c)\right](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)](s)$.

(8) $\mathcal{L}\left[e^{ct}\, f(t)\right](s) = \mathcal{L}[f](s-c)$.

(9) $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n\,\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.

(10) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$.