



**Questão 1:** (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Verifique se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln(n)}}$  é absolutamente convergente, condicionalmente convergente, ou divergente.

(b) (1.0 ponto) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n}}{n^2 8^n}$

**Questão 2:** (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Encontre a série de Maclaurin da função  $f(x) = x^2 e^{-x}$ , em torno do ponto  $x = 0$ , e o respectivo raio de convergência.

*Sugestão: use a série de Maclaurin de  $g(x) = e^x$  em torno de  $x = 0$ .*

(b) (1.0 ponto) Usando o item (a) e derivação da série de potências, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} (n+2)}{n!} = -4.$$

**Questão 3:** (3.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Expresse a função

$$f(t) = \begin{cases} 1/2; & 0 \leq t < \pi \\ 2 \cos(\pi - t); & \pi \leq t. \end{cases}$$

usando a função degrau e calcule a sua transformada de Laplace  $\mathcal{L}(f)$ .

(b) (2.5 pontos) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (h * g)(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$$

onde  $h(t) = e^{-2t}$  e  $g(t) = u_1(t)$ .

**Questão 4:** (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$(2x^2 - 1)y''(x) + 3xy'(x) + xy(x) = 0 \quad (*)$$

(a) (1.0 ponto) Verifique que  $x = 0$  é ponto ordinário da equação. Encontre a relação de recorrência da solução em série de potências de  $(*)$ , em torno de  $x = 0$ .

(b) (1.0 ponto) Encontre a solução geral da equação  $(*)$  em torno de  $x = 0$ , explicitando as duas soluções linearmente independentes (bastam os quatro primeiros termos de cada solução).

(c) (0.5 ponto) Determine o raio de convergência mínimo para a solução encontrada no item (b).

**Regras:**

- Duração da prova: 120 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.

**TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO**

## Tabela Básica de Transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s > a$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$ , com  $n$  sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{\text{sen } at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t).g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$
- $\mathcal{L}\{e^{ct}g(t)\} = G(s-c)$
- $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s).G(s)$
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$