Questão 1: (2.0 pontos)
Classifique as séries abaixo em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

(a) (0.7 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n\, n!}{n^n}$

Solução:

(**a**) Neste item aplicaremos o teste da razão à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$. Temos que:

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n} \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)n!}{(n+1)^{n+1}} x \frac{n^n}{2^n n!} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1. \quad ((1))$$

De (1) resulta pelo teste da razão que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n}\right|$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n}$ converge absolutamente.

(b) (0.7 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

Solução:

(i) Mostraremos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ é convergente pelo teste de Leibniz.De fato:

(1) A série é alternada;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(n+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{n^2}\right)}} = 0;$

(3) Mostraremos que a seqüência $\left\{u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right\}$ é decrescente.

• **Alternativa 1** De fato, considere

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}},\ x \geqslant 1. \quad ((2))$$

De (2) obtemos:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{2}x^3\left(x^3+1\right)^{-1/2}}{(x^3+1)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2-3x^3}{2(x^3+1)^{3/2}}. \Longrightarrow f'(x) = \frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{3/2}}. \quad ((3))$$

De (3) resulta que:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x^3 > 2 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{2}. \qquad ((4))$$

Logo, a seqüência $\left\{ u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}} \right\}$ é decrescente para $n \geqslant 2$.

Por Leibniz a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ converge.

• **Alternativa 2** De fato, temos que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\sqrt{n^3+1}}{n\sqrt{(n+1)^3+1}} = \frac{(n+1)n\sqrt{n+\dfrac{1}{n^2}}}{n(n+1)\sqrt{n+1+\dfrac{1}{(n+1)^2}}},$$

ou equivalentemente,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{n+1+\dfrac{1}{(n+1)^2}}} < 1, \text{ pois } \sqrt{n+\frac{1}{n^2}} < \sqrt{n+1+\frac{1}{(n+1)^2}}. \qquad ((5))$$

(ii) Mostraremos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ é divergente aplicando o o teste de comparação por limite.

De fato, considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Logo:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^{3/2}}{(n^3+1)^{1/2}} \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1}} = 1 \qquad ((6))$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge pois $p = \dfrac{1}{2}$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ diverge.

De (i) e de (ii) segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ é condicionalmente convergente.

(c) (0.6 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{1+5n^{1/3}}$

Solução:

(c) Mostraremos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{1+5n^{1/3}}$ é divergente pelo teste da divergência. De fato:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{1+5n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{1/3}\left[5+\dfrac{1}{n^{1/3}}\right]} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{5} \neq 0. \qquad ((7))$$

Sugestão: Sabe-se do Cálculo I que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (denominado limite fundamental exponencial)

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n\,3^n}$. Faça o que se pede:

(a) (1.0 ponto) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências acima;

Solução:

Temos que:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} \Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} 3 \Longrightarrow R = 3. \qquad ((8))$$

Pelo teste da razão a série convergirá absolutamente se $|x+2| < 3$ e divergirá se $|x+2| > 3$.

• Seja $x = 1$. Então:

$$f\ (1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \qquad ((9))$$

(i) Mostraremos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente pelo teste de Leibniz.

De fato:

(1) A série é alternada;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

3) A seqüência $\left\{u_n = \dfrac{1}{n}\right\}$ é decrescente, pois $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = u_n$.

Logo, por Leibniz a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

• Seja $x = -5$. Então:

$$f\ (-5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad ((10))$$

Esta série diverge pelo teste da integral pois é uma p-série de ordem 1.

Portanto, o intervalo de convergência é $(-5, 1]$.

(b) (0.8 ponto) Determine uma expressão em série de potências em torno do ponto $x_0 = -2$ para $f'(x)$;

Solução:
Sabemos da teoria de séries de potências que a derivada da série coincide com asérie das derivadas. Logo:

$$f\ '(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{n-1}}{3^n} \text{ com } |x+2| < 3. \qquad ((11))$$

(c) (0.7 ponto) Obtenha o intervalo de convergência da série de potências obtida no item (b).

Solução:
(**c**) Sabemos também da teoria de séries de potências que o raio de convergência é o mesmo da série original, ou seja $R = 3$. Basta então verificar a convergência da série em $x = 1$ e $x = -5$.

- Seja $x = 1$. Então:

$$f\ '(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}. \qquad ((12))$$

Como os termos da série para n par são iguais a $\frac{1}{3}$ e os termos da série para n ímpar são iguais a $-\frac{1}{3}$ não existe o limite do termo geral quando n tende a infinito. Então a série dada em (12) diverge pelo teorema da divergência

- Seja $x = -5$. Então:

$$f\ '(-5) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}. \qquad ((14))$$

A série dada em (14) diverge pelo teorema da divergência pois:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 0. \qquad ((15))$$

Portanto, o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.

Questão 3: (3.0 pontos)
Considere a equação diferencial dada abaixo:

$$2x^2 y''(x) + (x - x^2)y'(x) - y(x) = 0, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

(a) (0.6 ponto) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial;

Solução:

Temos neste caso que:

$$(i)\quad p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{(x-x^2)}{2x^2} \Longrightarrow xp(x) = \frac{(x-x^2)}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} xp(x) = \frac{1}{2} = p_0;$$

$$(ii)\quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = -\frac{1}{2x^2} \Longrightarrow x^2q(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^2q(x) = -\frac{1}{2} = q_0.$$

De (i) e de (ii) segue que $x = 0$ é um ponto singular regular, pois $p(x)$ e $q(x)$ não são analíticas em 0, o que mostra que $x = 0$ não é ponto ordinário e, portanto, é ponto singular. Além disso, $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em $\mathbb{R}$ e os limites em $x = 0$ de $xp(x)$ e $x^2q(x)$ existem, mostrando que é um ponto singular regular.

(b) (0.4 ponto) Determine as raízes da equação indicial;

Solução:
Temos que a equação indicial é da forma:

$$F(r) = r(r-1)+p_0r+q_0 = 0 \Longrightarrow r^2-r+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow 2r^2-r-1 = 0 \Longrightarrow r_1 = 1 \text{ e } r_2 = -\frac{1}{2}.$$

(c) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência;

Solução:
Temos que:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Longrightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \Longrightarrow y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}. \tag{(1)}$$

Substituindo as equações dadas em (1) na EDO resulta que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0, \tag{(2)}$$

onde $0 < x < \rho$.
De (2) obtemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$x^r\Bigg\{2r(r-1)a_0 + ra_0 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\Big[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1\Big]a_n - (n+r-1)a_{n-1}\right\}x^n\Bigg\} = 0, \tag{(3)}$$

onde $0 < x < \rho$.
Da equação (3) deduzimos:

$2r(r-1)a_0+ra_0-a_0 = 0 \Longrightarrow 2r(r-1)+r-1 = 0$, (equação indicial) pois por hipótese $a_0 = 1$;

$$a_n(r) = \frac{(n+r-1)a_{n-1}(r)}{(n+r-1)(2n+2r+1)} \Longrightarrow a_n(r) = \frac{a_{n-1}(r)}{2n+2r+1};\ \forall\ n \geqslant 1, \qquad ((4))$$

onde a equação (4) é denominada relação de recorrência.

(d) (1.0 ponto) Obtenha a solução $y_1(x)$ correspondente à maior raiz da equação indicial.

Solução:
Substituindo $r_1 = 1$ na equação (4) obtemos:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+3)};\ \forall\ n \geqslant 1. \qquad ((5))$$

• Substituindo $n = 1$ na equação (5) resulta:

$$a_1 = \frac{a_0}{5} = \frac{1}{5}, \text{ pois por hipótese } a_0 = 1.$$

• Substituindo $n = 2$ na equação (5) resulta:

$$a_2 = \frac{a_1}{7} \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{5.7}.$$

• Substituindo $n = 3$ na equação (5) resulta:

$$a_3 = \frac{a_2}{9} \Longrightarrow a_3 = \frac{1}{5.7.9}.$$

Podemos concluir então que:

$$a_n = \frac{1}{5.7.9...(2n+3)};\ \forall\ n \geqslant 1. \qquad ((6))$$

Substituindo a_n dada por (6) em (1) obtemos:

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5.7.9...(2n+3)}\right]. \qquad ((9))$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Seja a seguinte EDO: $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t)$, com $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ 2 & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}.$$

Encontre a solução do problema de valor inicial usando Transformada de Laplace e SEM usar convolução.

Solução:

Vemos que $f(t) = 2u_{2\pi}(t)$, que tem Transformada de Laplace $F(s) = e^{-2\pi s}\dfrac{2}{s}$. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da EDO obtemos $(s^2+2s+2)Y(s) = e^{-2\pi s}\dfrac{2}{s}+2$. Segue que $Y(s) = \dfrac{2e^{-2\pi s}}{s[(s+1)^2+1]} + \dfrac{2}{(s+1)^2+1}$. Aplicando frações parciais e usando a tabela de Transformadas de Laplace obtemos

$$Y(s) = e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}\right)+\frac{2}{(s+1)^2+1} = e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\operatorname{sen} t\}+\mathcal{L}\{2e^{-t}\operatorname{sen} t\}.$$

Conclui-se que

$$y(t) = u_{2\pi}(t)\left(1 - e^{-(t-2\pi)}\left(\cos(t-2\pi)+\operatorname{sen}(t-2\pi)\right)\right) + 2e^{-t}\operatorname{sen} t$$

isto é,

$$y(t) = u_{2\pi}(t)\left(1 - e^{-(t-2\pi)}(\cos t + \operatorname{sen} t)\right) + 2e^{-t}\operatorname{sen} t,$$