Questão 1: (2.0 pontos)
Classifique as séries abaixo em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

(a) (1.0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \ln n}{(n+1)^3}$

Solução:

(**a**) Vamos mostrar que esta série é absolutamente convergente, isto é, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)^3}$ é convergente.

Temos que, para todo $n \geqslant 1$, $\dfrac{n \ln n}{(n+1)^3} < \dfrac{n \ln n}{n^3} = \dfrac{\ln n}{n^2}$ e, portanto, pelo teste da comparação, basta mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente.

Para mostrar a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ temos, pelo menos, três alternativas:

- Alternativa 1: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$. Esta é igual a duas vezes a p-série de ordem 3/2, que é convergente pois $3/2 > 1$. Vamos mostrar que $\ln n < 2n^{1/2}$ para todo $n \geqslant 1$: Seja a função $f(x) = \ln x - 2x^{1/2}$. Temos que $f(1) < 0$ e $f'(x) = \dfrac{1}{x}(1 - x^{1/2})$ que é negativo para $x > 1$ e, portanto, $f(x) < 0$ para todo $x > 1$. Com isso podemos assegurar que $\ln n < 2n^{1/2}$ para todo $n \geqslant 1$ e, portanto, $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{2}{n^{3/2}}$ para todo $n \geqslant 1$. Portanto, aplicando novamente o teste da comparação, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, já que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ é convergente, concluindo o exercício. Observe que poderíamos ter comparado diretamente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)^3}$ com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ e este exercício seria resolvido em um único passo.

- Alternativa 2: Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Esta é uma p-série de ordem 3/2, que é convergente pois $3/2 > 1$. Vamos utilizar o teste da comparação no limite para mostrar que série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente. Seja, então, $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Temos que $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\ln n}{n^{1/2}}$ e, usando L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{1/2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{1/2}} = 0.$$

Concluímos, portanto, pelo teste da comparação no limite que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente, como desejávamos. Vale a mesma observação feita para a primeira alternativa, isto é, que poderíamos ter comparado diretamente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)^3}$ com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ e este exercício seria resolvido em um único passo.

- Alternativa 3: Usaremos o teste da integral para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente. Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Temos que

  (a) $f(x)$ está definida e é positiva para todo $x > 1$

  (b) $f(n) = \frac{\ln n}{n^2}$

  (c) $f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ e, portanto, a derivada é negativa para todo $x > e$, mostrando que $f(x)$ é decrescente para $x \geqslant 3$.

  Temos, então, todas as condições para aplicar o teste da integral e verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente. Aplicando integração por partes, tomando $u' = 1/x^2$ e $v = \ln x$ temos que

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

  Então temos que $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{3}$, mostrando que a integral converge e, pelo teste da integral, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ é convergente, concluindo o exercício.

(b) (1.0 ponto) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$

Solução:

Vamos aplicar o teste da comparação no limite na série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}}$ e mostrar que esta não converge e, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$ não é absolutamente convergente. Sejam $a_n = \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}}$ e $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$. Temos que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2/3}}{(n^2+1)^{1/3}} = \frac{1}{(1+1/n^2)^{1/3}}$. Temos, então que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n^2)^{1/3}} = 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é uma p-série de ordem 2/3 e como $2/3 < 1$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é divergente e, portanto, pelo teste da comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$ não é absolutamente convergente.

Mostraremos, agora, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$ converge condicionalmente usando o teste de Leibniz.

De fato:

(1) A série é alternada;

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}} = 0$;

(3) A seqüência $\left\{ a_n = \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}} \right\}$ é decrescente pois o denominador aumenta à medida que n cresce.

Todas as condições do teste de Leibniz foram satisfeitas e podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{1/3}}$ é convergente e como já tínhamos visto que esta série não é absolutamente convergente, podemos concluir que é condicionalmente convergente..

Questão 2: (1.5 ponto)

Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{2^{2n}n^2}$.

Solução:

Seja $a_n = \frac{(x+3)^{2n}}{2^{2n}n^2}$. Então $a_{n+1} = \frac{(x+3)^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2}$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x+3)^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2} . \frac{2^{2n}n^2}{(x+3)^{2n}} = \frac{(x+3)^2 n^2}{4(n+1)^2}.$$

Isto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+3)^2 n^2}{4(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+3)^2 n^2}{n^2\left(4+8/n+4/n^2\right)} = \frac{(x+3)^2}{4}.$$

Se denotarmos o raio de convergência por R e usarmos o teste da razão obtemos que $\frac{R^2}{4} = 1$ e, portanto, o raio de convergência é 2.

Para identificarmos o intervalo de convergência temos de analisar os pontos $-3-R$ e $-3+R$, isto é, os pontos $x=-5$ e $x=-1$.

Aplicando a série de potências em $x=-5$ obtemos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{2^{2n}n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que converge pois é uma p-série de ordem 2. Portanto $x=-5$ pertence ao intervalo de convergência.

Aplicando a série de potências em $x=-1$ obtemos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^{2n}}{2^{2n}n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que converge pois é uma p-série de ordem 2. Portanto $x=-1$ pertence ao intervalo de convergência.

Conclui-se, então, que o raio de convergência é 2 e o intervalo de convergência é $[-5, -1]$.

Questão 3: (3.0 pontos)

Considere a equação diferencial dada abaixo:

$$2x\,y''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

(a) (1.0 ponto) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial;

Solução:

Temos neste caso que:

$$(i) \quad p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{1+x}{2x} \qquad\qquad (ii) \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{2x}.$$

Vemos que $\lim_{x\to 0} p(x)$ não existe e, portanto, $x = 0$ não é ponto ordinário. Então, $x = 0$ é ponto singular. Temos, também, que

$$(iii) \quad xp(x) = \frac{x(1+x)}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \qquad \text{e, portanto,} \qquad p_0 := \lim_{x\to 0} xp(x) = \frac{1}{2};$$

$$(iv) \quad x^2q(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \qquad \text{e, portanto,} \qquad q_0 := \lim_{x\to 0} x^2q(x) = 0.$$

De (iii) e (iv) segue que $x = 0$ é um ponto singular regular, pois $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em uma vizinhança de $x = 0$ e os limites em $x = 0$ de $xp(x)$ e $x^2q(x)$ existem, mostrando que é um ponto singular regular.

(b) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência;

Solução:

Temos que a equação indicial é da forma:

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \Longrightarrow r^2 - r + \frac{1}{2}r = 0 \Longrightarrow 2r^2 - r = 0 \Longrightarrow r_1 = 1/2 \text{ e } r_2 = 0.$$

Como ambos são reais e a diferença entre eles não é um número inteiro, temos duas soluções linearmente independentes, ambas da forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, com $a_0 = 1$, sendo r as raízes da equação indicial. Temos, então, que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \qquad \text{e} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}. \qquad ((1))$$

Substituindo as equações dadas em (1) na EDO resulta que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0, \qquad ((2))$$

onde $0 < x < \rho$.

De (2) obtemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r-1} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$x^r\Big\{2r(r-1)a_0 + ra_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)\Big]a_n + (n+r)a_{n-1}\Big\}x^n\Big\} = 0, \quad ((3))$$

onde $0 < x < \rho$.

Da equação (3) deduzimos que $2r(r-1)a_0 + ra_0 - a_0 = 0$. Como, por hipótese, temos que $a_0 = 1$, esta equação corresponde à equação indicial, como esperávamos. A relação de recorrência é obtida a partir de ((3)) e é dada por

$$a_n = -\frac{(n+r)a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1)} \Longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n+2r-1}, \ \forall\, n \geqslant 1, \qquad ((4))$$

onde a equação (4) é denominada relação de recorrência (válida para as raízes da equação indicial, isto é, $r_1 = 1/2$ e $r_2 = 0$).

(c) (1.0 ponto) Obtenha a solução $y_1(x)$ correspondente à maior raiz da equação indicial.

Solução:

Substituindo $r_1 = 1/2$ na equação (4) obtemos:

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2n+2} = -\frac{a_n}{2(n+1)}, \ \forall\, n \geqslant 0. \qquad ((5))$$

- Substituindo $n = 0$ na equação (5) resulta:

$$a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ pois por hipótese } a_0 = 1.$$

- Substituindo $n = 1$ na equação (5) resulta:

$$a_2 = -\frac{a_1}{2.2} = \frac{1}{2^2.2}.$$

- Substituindo $n = 2$ na equação (5) resulta:

$$a_3 = -\frac{a_2}{2.3} = -\frac{1}{2^3.3.2}.$$

- Substituindo $n = 3$ na equação (5) resulta:

$$a_4 = -\frac{a_3}{2.4} = \frac{1}{2^4.4.3.2}.$$

• Substituindo $n = 4$ na equação (5) resulta:

$$a_5 = -\frac{a_4}{2.5} = -\frac{1}{2^5.5.4.3.2}.$$

Podemos concluir então que:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}, \forall n \geqslant 1. \qquad ((6))$$

Substituindo a_n dada por (6) na expressão para $y_1(x)$ obtemos

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n.n!}\right).$$

Questão 4: (3.5 pontos)

Faça o que se pede

(a) (1.0 ponto) Determine a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-2s}}{2s^2+4s+10}\right\}$

Solução:

Temos que $\dfrac{(s+1)e^{-2s}}{2s^2+4s+10} = \dfrac{e^{-2s}}{2}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$.

Consultando a tabela de transformadas de Laplace vemos que $\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+4} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$.

Portanto $\dfrac{(s+1)e^{-2s}}{2s^2+4s+10} = \dfrac{e^{-2s}}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$.

Após uma nova consulta à tabela de transformadas de Laplace, vemos que

$$\frac{e^{-2s}}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 2t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{u_2(t)e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)}{2}\right\}.$$

Portanto, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-2s}}{2s^2+4s+10}\right\} = \dfrac{u_2(t)e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)}{2}$.

(b) (2.5 pontos) Utilizando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = f(t); \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad f(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leqslant t < 1, \\ 5e^{t-1}, & \text{se } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Solução:

Vemos que $f(t) = 2\,(1 - u_1(t)) + 5u_1(t)e^{t-1} = 2 + u_1(t)(5e^{t-1} - 2)$.

Consultando a tabela de transformadas de Laplace vemos que $F(s) = \dfrac{2}{s} + e^{-s}\left(\dfrac{5}{s-1} - \dfrac{2}{s}\right)$.

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da EDO e usando $F(s)$ obtido acima temos que

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{2}{s} + e^{-s}\left(\frac{5}{s-1} - \frac{2}{s}\right).$$

Segue que $Y(s) = e^{-s}\left(\dfrac{5}{(s^2+4)(s-1)} - \dfrac{2}{s(s^2+4)}\right) + \dfrac{2}{s(s^2+4)}$.
Aplicando frações parciais obtemos que

$$\frac{5}{(s^2+4)(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+4} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right).$$

Substituindo na expressão para $Y(s)$ temos que

$$Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+4} - \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)}\right) + \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}.$$

Consultando a tabela de Transformadas de Laplace vemos que

$$Y(s) = e^{-s}\mathcal{L}\left\{e^t - \cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right\}.$$

Portanto, utilizando novamente a tabela de Transformadas de Laplace, temos que

$$\begin{aligned} Y(s) = \mathcal{L}\left\{u_1(t)\left(e^{t-1} - \cos 2(t-1) - \frac{\operatorname{sen} 2(t-1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2(t-1)}{2}\right)\right\} \\ + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$y(t) = u_1(t)\left(e^{t-1} - \cos 2(t-1) - \frac{\operatorname{sen} 2(t-1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2(t-1)}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2},$$