Questão 1: (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{ln(n)}}$ é absolutamente convergente, condicionalmente convergente, ou divergente.

Solução:
Consideremos a série de valores absolutos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{ln(n)}},$$

seja $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{ln(x)}}$, $x \geq 2$ como $f'(x) = -\dfrac{2ln(x)+1}{2x^2(ln(x))^{3/2}} < 0$ para $x \geq 2$, $f(x)$ é decrescente. Além disso $f(x)$ é contínua pois $\dfrac{1}{x}$ é continua para $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ é continua para $y > 0$ e finalmente $\ln z > 0$ é continua para $z > 1$, e $f(n) = \dfrac{1}{n\sqrt{ln(n)}}$, portanto pode-se usar o Teste da Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}} = \lim_{A\to\infty} 2(ln(x))^{1/2}\Big|_2^A = \infty,$$

concluimos que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{ln(n)}}\right|$ é divergente.

Seja agora $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{ln(n)}} > 0$. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{ln(n)}} = 0.$$

E também que $b_n > b_{n+1}$, $n \geq 2$ (provado acima pois, $b_n = f(n)$). Assim, pelo Teste da Série Alternada, conclui-se que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{ln(n)}}$ é convergente.

Portanto a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{ln(n)}}$ é condicionalmente convergente.

(b) (1.0 ponto) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n}}{n^2 8^n}$

Solução:
Seja

$$a_n = \frac{(x-3)^{3n}}{n^2 8^n},$$

usando o Teste da Razão

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{3n+3}}{|x-3|^{3n}} \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{8^n}{8^{n+1}} = \frac{|x-3|^3}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x-3|^3}{8},$$

logo a série converge absolutamente para todo x tal que

$$\frac{|x-3|^3}{8} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3|^3 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| < 2,$$

o raio de convergência da série é $R = 2$. Encontremos agora o intervalo de convergência, temos que

$$|x-3| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x-3 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 5.$$

Logo os extremos do intervalo são $x = 1$ e $x = 5$. Substituindo o valor de $x = 1$ na série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^{3n}}{n^2 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n} 8^n}{n^2 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{converge absolutamente,}$$

pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pois uma é p-série onde $p = 2 > 1$. Substituindo o valor de $x = 5$ na série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^{3n}}{n^2 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{convergente.}$$

Portanto o intervalo de convergência da série é $[1, 5]$.

Questão 2: (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Encontre a série de Maclauren da função $f(x) = x^2 e^{-x}$, em torno do ponto $x = 0$, e o respectivo raio de convergência.
Sugestão: use a série de Maclauren de $g(x) = e^x$ em torno de $x = 0$.

Solução:

Sabemos que $g(x) = e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, tem raio de convergência $R = \infty$. Então

$$f(x) = x^2 e^{-x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2},$$

logo

$$x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \quad \text{abs. convergente} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

também tem raio de convergência $R = \infty$.

(b) (1.0 ponto) Usando o ítem (a) e derivação da série de potências, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} (n+2)}{n!} = -4.$$

Solução:

Como a série (1) converge absolutamente, podemos derivar. Derivando cada lado da equação (1), obtem-se

$$\begin{aligned}
2xe^{-x} - x^2e^{-x} &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2}\right\}' \\
&= \{\, x^2 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ ... \ + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!} + \ ... \,\}' \\
&= 2x - \frac{3x^2}{1!} + \ ... \ + (-1)^n (n+2) \frac{x^{n+1}}{n!} + \ ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (n+2) x^{n+1}
\end{aligned}$$

assim obtemos a seguinte igualdade

$$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} x^{n+1},$$

tomando $x = 2$,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} 2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = -4.$$

Questão 3: (3.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Expresse a função

$$f(t) = \begin{cases} 1/2; & 0 \leq t < \pi \\ 2\cos(\pi - t); & \pi \leq t. \end{cases}$$

usando a função degrau e calcule a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$.

Solução:

Observe que $\cos(\pi - t) = \cos(t - \pi)$, então

$$f(t) = (u_0(t) - u_\pi(t))\frac{1}{2} + u_\pi(t) 2\cos(t - \pi),$$

portanto

$$\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{e^{-0s}}{s}\frac{1}{2} - \frac{e^{-\pi s}}{s}\frac{1}{2} + 2\frac{e^{-\pi s} s}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{2s} - \frac{e^{-\pi s}}{2s} + \frac{2e^{-\pi s} s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

(b) (2.5 pontos) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (h * g)(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$$

onde $h(t) = e^{-2t}$ e $g(t) = u_1(t)$.

Solução:
Como h e g são continuas por partes. Vemos que $f(t) = (h * g)(t)$ tem Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s+2}\frac{e^{-s}}{s}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da EDO obtemos

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) - 1 = \frac{e^{-s}}{s(s+2)},$$

segue que

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{e^{-s}}{s(s+2)(s-2)^2} \quad \text{para} \quad s > 0.$$

Usando a tabela de Transformadas de Laplace obtemos

$$\begin{aligned} y(t) =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+2)(s-2)^2}\right\} \\ =& te^{2t} + u_1(t)z(t-1), \end{aligned} \tag{2}$$

aplicando frações parciais e usando a tabela de Transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} z(t) =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)(s-2)^2}\right\} \\ =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8s} - \frac{1}{32(s+2)} - \frac{3}{32(s-2)} + \frac{1}{8(s-2)^2}\right\} \\ =& \frac{1}{8} - \frac{e^{-2t}}{32} - \frac{3e^{2t}}{32} + \frac{te^{2t}}{8}, \end{aligned} \tag{3}$$

por (2) and (3) segue que

$$y(t) = te^{2t} + u_1(t)\left(\frac{1}{8} - \frac{e^{-2(t-1)}}{32} - \frac{3e^{2(t-1)}}{32} + \frac{(t-1)e^{2(t-1)}}{8}\right).$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$(2x^2 - 1)y''(x) + 3xy'(x) + xy(x) = 0 \qquad (*)$$

(a) (1.0 ponto) Verifique que $x = 0$ é ponto ordinário da equação. Encontre a relação de recorrência da solução em série de potências de $(*)$, em torno de $x = 0$.

Solução:
Como $P(x) = 2x^2 - 1$, $Q(x) = 3x$ e $R(x) = x$, são analíticos (polinômios) e $P(0) = -1 \neq 0$, então $x = 0$ é ponto ordinário da equação.
Temos que:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{abs. convergente} \quad |x| < R \tag{4}$$

e

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{abs.convergente} \quad |x| < R$$

Substituindo as equações dadas em (4) na EDO resulta que:

$$(2x^2 - 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \quad \text{em} \quad |x| < R$$

equivalentemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n(n-1) + 3n) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0,$$

escrevendo os primeiros termos para começar as somas a partir de 1, obtemos

$$-2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n(2n+1) a_n - (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-1} \right\} x^n = 0 \quad \text{para} \quad |x| < R \qquad (5)$$

da equação (5) e usando propriedades, deduzimos:

$$a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{n(2n+1) a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 1. \qquad (6)$$

(b) (1.0 ponto) Encontre a solução geral da equação $(*)$ em torno de $x = 0$, explicitando as duas soluções linearmente independentes (bastam os quatro primeiros termos de cada solução).

Solução:
Da equação (6) temos que $a_2 = 0$. Escolhendo valores sucessivos de n na equação (6) temos:
Para $n = 1$:

$$a_3 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6}. \qquad (7)$$

Para $n = 2$:

$$a_4 = \frac{a_1}{12}.$$

Para $n = 3$:

$$a_5 = \frac{21 a_3}{20} \Rightarrow a_5 = \frac{21}{40} a_1 + \frac{7}{40} a_0.$$

Para $n = 4$:

$$a_6 = \frac{36 a_4 + a_3}{30} \Rightarrow a_6 = \frac{7}{60} a_1 + \frac{1}{180} a_0.$$

Substituindo esses coeficientes na equação $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ temos

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{7}{40} x^5 + \frac{1}{180} x^6 + \cdots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{21}{40} x^5 + \cdots \right).$$

Portanto, as duas soluções linearmente independentes são:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{7}{40} x^5 + \frac{1}{180} x^6 + \cdots, \quad y_2(x) = x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{21}{40} x^5 + \cdots$$

(c) (0.5 ponto) Determine o raio de convergência mínimo para a solução encontrada no ítem (b).

Solução:
Temos neste caso que

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3x}{2x^2 - 1}, \qquad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{x}{2x^2 - 1}.$$

Usando as propriedades da série geométrica, observe que

$$\frac{1}{2x^2 - 1} = -\frac{1}{1 - 2x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n x^{2n},$$

e a série converge absolutamente para todo número real x, tal que $2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{2}$. Logo o raio de convergência de $p(x)$, $R_p = 1/\sqrt{2}$ e o raio de convergência de $q(x)$, $R_q = 1/\sqrt{2}$. Seja R_y o raio de convergência para a solução encontrada no ítem (b), então

$$R_y \geq \min\{R_p, R_q\} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$