Questão 1: (1.0 ponto)

Analise a convergência das séries abaixo

(a) (0.5 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$,

Solução:

Pelo o teste de razão temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n\, n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = 2\, e^{-1} < 1$$

Por isso a série é convergente.

(b) (0.5 ponto) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Solução:

Consideremos a função contínua $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ com a sua derivada $f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos(\pi/x)$. Note que $\pi/x \le \pi/2$ se $x \ge 2$ e por isso $f'(x) < 0$ se $x \ge 2$, o que implica $f(n+1) < f(n)$ para todo $n \ge 2$. Além disso

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sen}(\pi y) = 0.$$

Pelo teste da série alternada, a série é convergente.

Questão 2: (2.0 pontos)

Determine os coeficientes a_n e b_n da expansão da função $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ em série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ (em torno do ponto 0) e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x+3)^n$ (em torno do ponto -3) e calcule os raios de convergência correspondentes.

Solução:

Vamos transformar a função para poder usar a fórmula

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

cujo raio de convergência é 1. Assim

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^n$$

e $a_n = 2/3^{n+1}$ sendo o raio de convergência $R = 3$.

No segundo caso podemos escrever

$$\frac{2}{3-x} = 2\frac{1}{6-(x+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x+3}{6}}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{6^n}.$$

Assim $b_n = \frac{1}{3\cdot 6^n}$ e o raio de convergência é 6.

Questão 3: (2.5 pontos)

(a) (1.5 ponto) Usando a definição da transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ de uma função $f(t)$, mostre que

$$\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}.$$

Solução:
Por definição

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

e assim

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^{\infty}\frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)\, dt = \int_0^{\infty}(-t)e^{-st}f(t)\, dt = \mathcal{L}\{-tf(f)\}.$$

Use esse resultado para calcular a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right).$$

Solução:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \frac{1-s}{1+s}\frac{(1-s)+(1+s)}{(1-s)^2} = 2\frac{1}{1-s^2}$$

$$-tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{2\frac{1}{1-s^2}\right\} \Rightarrow tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{2\frac{1}{s^2-1}\right\} = 2\,\mathrm{senh}\, t.$$

$$f(t) = \frac{2}{t}\,\mathrm{senh}\, t$$

Solução:
Sabemos que

$$F(s) = \ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \ln(1+s) - \ln(1-s)$$

e assim

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{t}\}.$$

Logo,

$$tf(t) = e^t - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\frac{\operatorname{senh} t}{t}.$$

(b) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ da função

$$F(s) = \left\{ \frac{3s-2}{s^2-2s+5} e^{-2s} \right\}.$$

Solução:
Sendo

$$\frac{3s-2}{s^2-2s+5} e^{-2s} = \left(3\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{(s-1)^2+4} \right) e^{-2s},$$

obtemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3\, u_2(t)\, e^{(t-2)} \cos(2(t-2)) + \frac{1}{2} u_2(t) e^{(t-2)} \operatorname{sen}(2(t-2)).$$

Questão 4: (2.0 pontos)
Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} y''(t) + 2\, y'(t) + y(t) = e^{-t} + \delta(t - 2\pi) \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução:
Pelo transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ temos

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \left(\frac{1}{s+1} + e^{-2\pi s} \cos(2\pi) \right) = \frac{1}{(s+1)^3} + e^{-2\pi s} \frac{1}{(s+1)^2}$$

e

$$y(t) = \frac{e^{-t}\, t^2}{2} + u_{2\pi}(t)\, e^{-(t-2\pi)} (t - 2\pi).$$

Questão 5: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$(1 + x^2)\, y''(x) + x\, y'(x) - y(x) = 0.$$

(a) (1.5 ponto) Determine a relação de recorrência dos coeficientes a_n da solução $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, n\,(n-1) + a_n\, n - a_n\right) x^n \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)x^k + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, n\,(n-1) + a_n\, n - a_n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n\, n\,(n-1) + a_n\, n - a_n\Big)x^n
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos a relação de recorrência

$$
a_{n+2} = \left(\frac{1-n-n\,(n-1)}{(n+2)(n+1)}\right) a_n = \left(\frac{1-n}{2+n}\right) a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.
$$

$$
a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_4 = -\frac{1}{4}\, a_2 = -\frac{1}{8} a_0, \quad a_6 = -\frac{3}{6} a_4 = \frac{1}{16} a_0, \quad \ldots
$$

$$
a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad \ldots
$$

(b) (1 ponto) Determine a solução tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solução:
A solução é dada pela série $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots$, de modo que, usando as condições iniciais, temos $y(0) = a_0 = 1$ e $y'(0) = a_1 = 2$. Usando a relação de recorrência, obtemos

$$
y(x) = a_0\Big(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \cdots\Big) + a_1 x.
$$

Assim, considerando as condições inciais, obtemos a solução:

$$
y(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \cdots
$$