Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Gabarito da P1 Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Data**: 12/05/2011

---

1. (1,0 p) Analise a convergência das séries e escolha somente duas das séries abaixo indicadas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^3}$, (0,5)

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{5n+3}$, (0,5)

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n^2}{n!}$. (0,5)

   OBS: Não responda mais de duas. Se isto ocorrer serão corregidas as duas primeiras.

   Resposta:

   (a) Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x[\ln(x)]^3}$, $0 < x \neq 1$. Observemos que a função $\ln(x) > 0$ se $x > 1$. Então,

   - $f(x) > 0$ para todo $x > 1$.
     Como as funções $\ln(x)$ e y^{-m}, $m \in \mathbb{N}$ são contínuas para $x > 1$ e $y > 0$, então
   - $f(x)$ é contínua para $x > 1$.
     Derivando $f(x)$, temos

$$f'(x) = -\frac{3x[\ln(x)]^2\,(1/x) + [\ln(x)]^3}{x^2[\ln(x)]^6} = -\frac{3+\ln(x)}{x^2[\ln(x)]^4} < 0 \quad \text{se} \quad x > 1, \tag{1}$$

   assim podemos dizer que

   - $f(x)$ é uma função decrescente para $x > 1$.

   Logo $a_n := f(n)$ é também decrescente para $n \geq 2$. Além disso, calculemos a integral:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \left.\frac{[\ln(x)]^{-3+1}}{-3+1}\right|_2^{\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{[\ln(2)]^2} \tag{2}$$

   pois

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{[\ln(x)]^2} = 0.$$

   Aplicando o Critério da Integral, podemos concluir que

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty \quad \text{converge.}$$

   (b) Seja $a_n := \dfrac{3\sqrt{n}}{5n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$a_n = \frac{3}{n^{1-\frac{1}{2}}(5+\frac{3}{n})} = \frac{b_n}{n^{\alpha}},$$

   onde

- $\alpha := \dfrac{1}{2}$,
- $b_n := \dfrac{3}{5 + \frac{3}{n}}$.

como $\alpha < 1$ e $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \dfrac{3}{5} > 0$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{diverge.}$$

ou

Podemos considerar a sequência $d_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ com $\alpha = 1/2$ e a série $\sum d_n$ diverge pois é uma $\alpha-$Harmônica com $\alpha < 1$.

$$\frac{a_n}{d_n} = \frac{3}{5 + \frac{3}{n}} \quad \to \quad \frac{3}{5} > 0,$$

Por comparação

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{diverge.}$$

(c) Seja $b_n = (-1)^n a_n$ onde $a_n = \dfrac{n^2}{n!}, \quad n \geq 1$.
Observemos que

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

então

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 0.$$

Aplicando o Critério da Razão,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{converge.}$$

2. (1,5 p) Obtenha a representação da função $f(x) = e^x + x^2$ por sua correspondente série de Taylor em $x_0 = -1$ e calcule o raio de convergência da série obtida.

Resposta:

Considere a função $f(x) = e^x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$, é simple verificar que f é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e $x_0 = -1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{abs.convergente} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

em particular

$$e^{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} \quad \text{abs.convergente} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

além disso, seja $p(x) = x^2$, $p'(x) = 2x$, $p"(x) = 2$. Então,

$$p(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + \frac{2}{2!}(x - x_0)^2 = 1 - 2(x+1) + (x+1)^2,$$

substitutindo, tera

$$f(x) = (1+e^{-1}) + (-2+e^{-1})(x+1) + (1+\tfrac{e^{-1}}{2})(x+1)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-1}(x+1)^n}{n!} \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+1)^n, \quad (4)$$

onde

- $b_0 = 1+e^{-1}, \quad b_1 = -2+e^{-1}, \quad b_2 = 1+\frac{e^{-1}}{2},$
- $b_n = \dfrac{e^{-1}}{n!}, \quad n \geq 3.$

Observe que,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{e^{-1}}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^{-1}} = n+1 \quad \rightarrow \quad \infty.$$

logo o raio de convergência é $R = \infty$.

3. (2,5 p) Considere a equação diferencial, linear de segunda ordem

$$(3-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0. \quad (5)$$

(a) (1.5 p) Verifique que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação 5 e encontre a relação de recorrência associada à equação dada,

Resposta:

Sejam $P(x) = -\dfrac{3x}{3-x^2}$ e $Q(x) = -\dfrac{1}{3-x^2}$. Observe que

$$\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \quad \text{se} \quad |x| < \sqrt{3},$$

Da igualdade pode-se afirmar que as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em $x_0 = 0$.

Pelo Teorema, toda solução é da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \text{abs.convergente} \quad \forall |x| < R, \quad (6)$$

substitutindo na equação 5 para achar a_n, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \forall\, |x| < R,$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0 \qquad \forall\, |x| < R,$$

onde

$$d_n = 3(n+2)^2(n+1)a_{n+2} - (n+1)^2 a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

Então

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)\, a_n}{3(n+2)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

(b) (1,0 p) Determine a solução $y(x)$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Resposta:

Da equação 7, calcule os coeficientes a_n,
os a_{2n} :

$$a_2 = \frac{a_0}{3.2}, \ a_4 = \frac{1.[2.2-1]a_0}{3^2.2^2.2!}, \ a_6 = \frac{1.3.[2.3-1]a_0}{3^3.2^3.3!,}$$

Portanto

$$a_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)a_0}{6^n n!} \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{8}$$

os a_{2n+1} :

$$a_3 = \frac{2a_1}{3.3}, \ a_5 = \frac{2.4a_1}{3^2.3.5}, \ a_7 = \frac{2^3.3!a_1}{3^3.3.5\ldots(2.3+1)},$$

Portanto

$$a_{2n+1} = \frac{2^n.n!a_1}{3^n.3.5.\ldots(2n+1)} \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{9}$$

Para achar as soluções linearmente independentes considere

- $a_0 = 1, \ a_1 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \qquad |x| < R, \tag{10}$$

sendo a_{2n} definidas em 8.

- $a_0 = 0, \ a_1 = 1$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \qquad |x| < R. \tag{11}$$

sendo a_{2n+1} definidas em 9.

Logo a solução geral da equação 5 é dada

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

sendo c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Dos dados iniciais $y(0) = 1, \ y'(0) = 2$

$$1 = \quad c_1y_1(0) + c_2y_2(0) \tag{12}$$
$$2 = \quad c_1y_1'(0) + c_2y_2'(0) \tag{13}$$

então, $c_1 = 1 \quad c_2 = 2$.

4. (2,5 p) Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} 2y''(t) + y'(t) + 4y(t) = \quad \delta(t - \frac{\pi}{6}) \cdot \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Resposta:

Calculo de $\mathcal{L}\{\,\delta(t - \frac{\pi}{6})\sin(t)\,\}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - \frac{\pi}{6})\sin(t)dt = \int_0^{\infty} \delta(t - \frac{\pi}{6})[\,e^{-st}\sin(t)\,]dt$$

como a função $h(t) = e^{-st}\sin(t)$ é contínua em $\mathbb{R}$, aplicando a definição

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \frac{\pi}{6})[\, e^{-st}\sin(t)\,]dt = e^{-\frac{\pi}{6}s}\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}s}.$$

Aplicando a transformada na equação 14, obtemos

$$(s^2 + \frac{s}{2} + 2)\mathcal{L}\{\, y(t)\,\} = 1 + (\frac{1}{2})^2 e^{-\frac{\pi}{6}s},$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}\{\, y(t)\,\} = \frac{1}{(s+1/4)^2 + 31/16} + \frac{1}{4}\frac{e^{-\frac{\pi}{6}s}}{(s+1/4)^2 + 31/16}$$

aplicando transformada inversa, acima

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1/4)^2 + 31/16}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{6}s}}{(s+1/4)^2 + 31/16}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$y(t) = \sqrt{\frac{16}{31}}e^{-\frac{t}{4}}\sin(\sqrt{\frac{16}{31}}t) + \frac{1}{4}\,g(t - \frac{\pi}{6}).u_{\frac{\pi}{6}}(t),$$

onde

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{6}s}}{(s+1/4)^2 + 31/16}\right\} = \sqrt{\frac{16}{31}}e^{-\frac{t}{4}}\sin(\sqrt{\frac{16}{31}}t).$$

5. Resolver

   (a) (1.0) Calcule a transformada de Laplace $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ da função $g(t) = e^{-2t}f(t)$ onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \\ 0 & 1 \le t < 2, \\ 1 & 2 \le t < 3, \\ 0 & \quad 3 \le t. \end{cases} \tag{15}$$

Resposta:

Temos que

$$\begin{aligned} f(t) =& 1\, u_0(t) + (0-1)u_1(t) + (1-0)u_2(t) + (0-1)u_3(t), \\ =& 1 - u_1(t) + u_2(t) - u_3(t), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u_1(t)\} + \mathcal{L}\{u_2(t)\} - \mathcal{L}\{u_3(t)\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \quad s > 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-2t}f(t)\} &= F(s+2) \qquad \forall\, s > -2, \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{e^{-(s+2)}}{s+2} + \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} - \frac{e^{-3(s+2)}}{s+2} \\ &= \frac{1}{s+2}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i e^{-i(s+2)}. \end{aligned}$$

(b) (1,5) Calcule a transformada de Laplace inversa $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ da função

$$H(s) = \frac{(2s+1)e^{-3s}}{s(4s^2+4s+5)} + \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Resposta:

$$\begin{aligned} H(s) =& \frac{(2s+1)e^{-3s}}{s(4s^2+4s+5)} + \frac{2}{(s+2)^2}, \\ =& H_1(s)e^{-3s} + H_2(s), \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{H_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2}\right\} = 2e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 2e^{-2t}\,t.$$

A transformada de Laplace inversa para H_2 tambem pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s+2}\right\}\right\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = 2te^{-2t}.$$

Agora calculemos a transformada de Laplace inversa para $H_1(s)e^{-3s}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)e^{-3s}\} = u_3(t)h_1(t-3), \quad \text{onde} \quad h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)\}$$

Ideia 1: Usando frações parciais

$$H_1(s) = \frac{(2s+1)}{s(4s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{4s^2+4s+5},$$

onde encontramos $A = 1/5$, $B = -4/5$ e $C = 6/5$. ou

Ideia 2:

$$\begin{aligned} h_1(t) =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(4s^2+4s+5)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1/2}{s[(s+1/2)^2+1]}\right\} \\ =& \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_1(s)}{s}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\,H_1(s)\,\}d\xi \\ =& \frac{1}{2}\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\xi+1/2}{(\xi+1/2)^2+1}\right\}d\xi \\ =& \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{\xi}{2}}\cos(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Resolvendo a integral

$$\int_0^t e^{-\frac{\xi}{2}}\cos(\xi)d\xi = \frac{1}{5}\left\{2 - 2\,e^{-\frac{t}{2}}\cos(t) + 4\,e^{-\frac{t}{2}}\sin(t)\right\},$$

substitutindo, obtemos

$$h_1(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,e^{-\frac{t}{2}}\cos(t) + \frac{2}{5}\,e^{-\frac{t}{2}}\sin(t).$$

Professores: Carlos Ferraris, Katrin Grit, I Shih, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.