Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 1º Prova Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 2^o Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 11/10/2011

Questão 1. (2,5 pontos)

(a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = xe^x$. Pede-se:

- Ache a expansão em séries de potência de $f(x) = xe^x$ em torno do ponto $x = 0$.
- Escreva xe^x em funcao de $(x-1)e^{x-1}$ e e^{x-1}.
- Usando os resultados dos itens anteriores, ache a expansão em séries de potência de $f(x) = xe^x$ em torno do ponto $x = 1$.
- Calcule o raio de convergência da série encontrada no item anterior.

(b) (1,0 ponto) Estude a convergência das seguintes séries:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2sen(n)}{n^3+n\ln(n)}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.

Solução

(a) Como $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, a série de Taylor de xe^x é

$$xe^x = x\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Aplicando o teste da razão para a série de Taylor de xe^x temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

Consequentemente a igualdade $xe^x = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}$ é valida para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(x-1)e^{x-1} = \sum_0^\infty \frac{(x-1)^{n+1}}{n!}$$

Observamos que

$$(x-1)e^{x-1} = xe^{x-1} - e^{x-1} \;\Rightarrow\; xe^{x-1} = (x-1)e^{x-1} + e^{x-1}$$

e

$$xe^x = e * ((x-1)e^{x-1} + e^{x-1}). \tag{1}$$

Substituindo x por $x-1$ na série de Taylor de e^x, temos que $e^{x-1} = \sum_0^\infty \frac{(x-1)^n}{n!}$ e portanto usando (1)

$$\begin{aligned} xe^x &= e * \left(\sum_0^\infty \frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + \sum_0^\infty \frac{(x-1)^n}{n!} \right) && (2) \\ &= e * \left(\sum_1^\infty \frac{(x-1)^n}{(n-1)!} + \sum_0^\infty \frac{(x-1)^n}{n!} \right) \\ &= e + \sum_1^\infty \left(\frac{e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!} \right) (x-1)^n && (3) \end{aligned}$$

Como as séries de potências de e^x e xe^x convergem para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos de (2) que a série de xe^x centrada em $x_0 = 1$ é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b)

- $$\sum_{n=1}^\infty \frac{n + 2sen(n)}{n^3 + n\ln(n)}.$$

  Temos que

  $$\left| \frac{n + 2sen(n)}{n^3 + n\ln(n)} \right| \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}$$

  Aplicando o teste da integral à série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ temos

  $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_1^\infty < \infty$$

  Como $2/n^3 < 2/n^2$, pelo critério da comparação concluímos que a série é convergente.

- $$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$$

  Observamos que

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1.$$

  Logo quando $n \to \infty$ não existe limite para

  $$(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}.$$

  Assim pelo teste da divergência concluímos que a série é divergente.

Questão 2. (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$(1-x)y''(x) - xy'(x) - y(x) = 1.$$

(a) (0,5 ponto) Mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário da equação diferencial e dê um valor mínimo para o raio de convergência da solução em serias de potência em torno de $x = 0$.

(b) (1,5 pontos) Determine a relação de recorrência geral para $n \geq 1$.

(c) (0,5 ponto) Determine os cinco primeiros termos da solução geral.

Solução.

(a) Dividindo a equação por $P(x) = 1 - x$, obtemos $p(x) = \frac{-x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} -x^n$, que é analítica em $x = 0$ com raio de convergência 1. Também $q(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} -x^n$ é analítica em $x = 0$ com raio de convergência 1. Portanto, $x = 0$ é um ponto ordinário e o raio de convergência da solução em series de potência é pelo menos 1.

Também é possível argumentar que $p(x)$ e $q(x)$ são funções racionais (razão de dois polinômios). Assim o raio de convergência da solução é igual ao menor dos módulos das raízes dos denominadores de $p(x)$ e $q(x)$. Nesse caso a raiz mais próxima é 1 e distância de 0 a 1 é 1. Portanto, o raio de convergência da solução em série de potência é pelo menos 1.

(b) Assumindo que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é solução, podemos escrever a equação como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} - na_n - a_n\big)x^n = 1.$$

Temos então $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} - (n+1)a_n = 0$
para $n \geq 1$ e a relação de recorrência é

$$a_{n+2} = \frac{a_n + na_{n+1}}{(n+2)}.$$

Para $n = 0$ temos $2a_2 - a_0 = 1$.

(c) A solução geral então é da forma

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \frac{1+a_0}{2} \cdot x^2 + \frac{a_0 + 2a_1 + 1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24}(5 + 5a_0 + 4a_1) \cdot x^4 + \ldots$$

Questão 3. (2,0 pontos)

Encontre a transformada de Laplace das funções:

(a) $f(t) = u_2(t)\delta(t-10) + u_{10}(t)\delta(t-2)$;

(b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t < 1 \\ 2-t & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}.$

Solução.

(a) Como

$$u_2(t)\delta(t-10) = \delta(t-10) \quad \text{e} \quad u_{10}(t)\delta(t-2) = 0,$$

teremos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-10\} = e^{-10s}.$$

(b) Tendo em vista que

$$f(t) = t - u_1(t)t + u_1(t)(2-t) = t + u_1(t)(2-2t) = t - 2u_1(t)(t-1),$$

então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Questão 4. (3,0 pontos)

Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 5e^t \operatorname{sen} t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$$

Solução.

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1}, \quad s > 1,$$

de onde segue-se que

$$F(s)(s^2+1) = 5 + \frac{5}{(s-1)^2+1} = \frac{5s^2-10s+15}{(s-1)^2+1}.$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{5s^2-10s+15}{(s^2+1)\big[(s-1)^2+1\big]} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{(s-1)^2+1},$$

onde a, b, c, d devem satisfazer o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ -2a + b + d = 5, \\ 2a - 2b + c = -10, \\ 2b + d = 15, \end{cases}$$

cujas soluções são $a = 2,\ b = 6,\ c = -2$ e $d = 3$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} F(s) &= 2\frac{s}{s^2+1} + 6\frac{1}{s^2+1} + \frac{-2s+3}{(s-1)^2+1} \\ &= 2\frac{s}{s^2+1} + 6\frac{1}{s^2+1} + \frac{-2(s-1)+1}{(s-1)^2+1} \\ &= 2\frac{s}{s^2+1} + 6\frac{1}{s^2+1} - 2\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos a solução

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\cos t + 6 \operatorname{sen} t - 2e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t \\ &= 2(1-e^t)\cos t + (6+e^t)\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$
