Questão 1: (2.5 pontos)

Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \pi \\ t, & t > \pi \end{cases}$$

(a) (0.7 ponto) Calcule a transformada de Laplace de f.

Solução:
De definção de transformada de Laplace temos: E portanto

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_\pi^\infty te^{-st}\,dt$$
$$= \int_\pi^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{te^{-st}}{-s}\right) + \frac{e^{-st}}{s}\,dt = e^{-s\pi}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

(b) (1.8 ponto) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = (s^2 + 1)\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f\} = e^{-s\pi}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-s\pi}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{\pi}{s(s^2+1)}\right) = e^{-s\pi}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \pi\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)\right]$$

Assim, da relação $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$ e das demais fórmulas da tabela concluímos que

$$y(t) = u_\pi(t)\left[(t-\pi) - sen(t-\pi) + \pi\left(1 - cos(t-\pi)\right)\right]$$

Questão 2: (2.0 pontos)

Estude a natureza das séries abaixo:

(a) (1.0 ponto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

Solução:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}} = \frac{(n+1)^3}{n^4} \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

Assim, pelo teste da razão, temos que a série dada é absolutamente convergente.

(b) (1.0 ponto)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$$

Solução:
$0 < \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$ e para $n \geq 1$ temos

$$\frac{1}{n+2} = \frac{2}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+2})} \leq \frac{2}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ é divergente, pelo Teste da Comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ também é divergente.

Questão 3: (3.0 pontos)

(a) (1.5 ponto) Desenvolva $f(x) = ln\,(x+1)$ em série de potências de x (série centrada em $x_0 = 0$).

Solução:
(a) $f(x) = ln\,(1+x) \Rightarrow f(0) = ln\,1 = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$
....

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n$$

(b) (1.0 ponto) Determine o intervalo de convergência I da série obtida no item (a)

Solução:
Se $x = 0$ a série converge

Se $x \neq 0$, $\frac{n}{n+1}|x| \to |x|$, quando $n \to \infty$

Assim, a série converge se $|x| < 1$.

Resta portanto estudar a natureza da série quando $x = 1$ e $x = -1$.

Se $x = -1$, temos : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e portanto a série diverge

Se $x = 1$, temos : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e portanto a série converge

Logo, o intervalo de convergência é $I = (-1, 1]$

(c) (0.5 ponto) Sabendo que f coincide com a série obtida no item (a) para x em I, determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Solução:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = ln\, 2$

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a equação diferencial

$$(x^2 + 1)y'' + (x + 1)y' + y = 0 \qquad (*)$$

Determine a relação de recorrência da solução por série de potências de $x + 1$ (série centrada em $x_0 = -1$) da equação dada.

Solução:
Observemos que:

$P(x) = x^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 2$; $Q(x) = x + 1$ e $R(x) = 1$

Temos que P, Q e R são polinômios e, $P(-1) \neq 0$. Logo, $x = -1$ ponto ordinário da equação.

Suponhamos a solução da forma $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + 1)^n$, e que esta série seja convergente em uma vizinhança de $x_0 = -1$ temos que:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x + 1)^{n-1} \text{ e } y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)\, a_n (x + 1)^{n-2}$$

Substituindo na equação temos:

$$(x+1)^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^{n-2}-2(x+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^{n-2}+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^{n-2}$$
$$+(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n(x+1)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n=0$$

Portanto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^n-2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^{n-1}+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^{n-2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n(x+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n=0$$

e

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+1)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}(x+1)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x+1)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n=0$$

Assim,

$$(4a_2+a_0)+(-4a_2+12a_3+2a_1)(x+1)+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n(n-1)+n+1)a_n-2(n+1)na_{n+1}+2(n+2)(n+1)a_{n+2}\right](x+1)^n=0$$

Logo,
$a_2=\dfrac{-a_0}{4}$

$a_3=(4a_2-2a_1)/12=(-a_0-2a_1)/12$

$a_{n+2}=\dfrac{-(n(n-1)+n+1)a_n+2(n+1)na_{n+1}}{2(n+2)(n+1)}\,, n\geq 2$