Questão 1: (2.0 pontos)

Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \qquad : f(x+4) = f(x)$$

(a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico da função no intervalo $[-6, 6]$

(b) (0.9 ponto) Determine a Série de Fourier da função f

(c) (0.6 ponto) Enuncie o Teorema de Fourier e o utilize para esboçar o gráfico da série de Fourier no intervalo $[-2, 2]$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

(a) (0.7 ponto) Dê a expressão para a extensão par e esboce seu gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$

(b) (0.7 ponto) Dê a expressão para a extensão ímpar e esboce seu gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$

(c) (1.1 ponto) Determine a Série de Fourier da extensão ímpar da função f

Questão 3: (3.0 pontos)

Consideremos o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, & (1) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, & (2) \\ u(x,0) = 3\cos 6x - 5\cos 10x, & 0 < x < \pi. & (3) \end{cases}$$

(a) (0.7 ponto) Supondo que a solução de (1) e (2) é da forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ (ou, se desejar, $u(x,t) = X(x)T(t)$), determine as duas equações diferenciais ordinárias associadas;

(b) (0.8 ponto) Desprezando o caso em que as raízes são reais e distintas, obtenha os autovalores e respectivas autofunções do problema de valor de contorno correspondente a $F(x)$ (ou $X(x)$);

(c) (0.7 ponto) Utilizando os autovalores obtidos no item anterior encontre as respectivas soluções de $G(t)$ (ou $T(t)$);

(d) (0.8 ponto) Analisando a condição inicial dada por (3) obtenha a solução do problema dado.

Observação: Justifique as respostas de todos os itens

Questão 4: (2.5 pontos)

Obtenha todas as soluções não nulas de **um** dos problemas de valor de contorno abaixo:

$$\begin{cases} H''(x) - \sigma H(x) = 0; & 0 < x < 2, \\ H(0) = H(2) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{ou} \qquad \begin{cases} H''(x) + \sigma H(x) = 0; & 0 < x < 2, \\ H(0) = H(2) = 0. \end{cases}$$

Observação: É obrigatório a analise dos casos: $\sigma < 0$, $\sigma = 0$ e $\sigma > 0$.

Formulário: Tabela resumo para EDO de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 \quad &\Longrightarrow \quad H(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 \quad &\Longrightarrow \quad H(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \\ r_1 = \alpha + \beta i,\ r_2 = \alpha - \beta i \quad &\Longrightarrow \quad H(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x]. \end{aligned}$$