Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — $2^{\underline{a}}$ Prova Unificada
Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias $2^{\underline{o}}$ Sem/2011
Código: MAC 248 — **Data**: 24/11/2011

Questão 1. (3,5 pontos). Nos itens abaixo justifique todas as suas respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

a) (1,5 ponto). Estenda a função $f : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ do intervalo unitário, definida por

$$f(x) = \frac{1}{2},$$

a uma função cuja série de Fourier tenha apenas termos em cossenos e calcule essa série.

b) (1,5 ponto). Estenda a função $g : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ do intervalo unitário, definida por

$$g(x) = x,$$

a uma função cuja série de Fourier tenha apenas termos em senos e calcule essa série de Fourier.

c) (0,5 ponto). Use os itens acima para justificar a seguinte igualdade:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}.$$

Questão 2. (3,0 pontos). Considere o seguinte problema de contorno associado à equação de ondas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) (2,0 pontos). Usando o método de separação de variáveis, estabeleça (sem resolver) as equações diferenciais ordinárias resultantes com relação a cada uma das variáveis t e x juntamente com as respectivas condições iniciais ou de contorno (problemas de condições iniciais/contorno com relação às variáveis t e x respectivamente).

b) (1,0 ponto). Sabendo que a solução do problema é dada pela expressão

$$u(x,t) = \cos\big(t\sqrt{1+\pi^2}\big)\operatorname{sen}(\pi x),$$

determine qual é o primeiro instante de tempo t^* para o qual $u(x, t^*) = 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$ (primeiro instante de tempo em que a onda passa pela posição de equilíbrio).

Questão 3. (3,5 pontos). Determine a solução do seguinte problema de Dirichlet no retângulo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 2 + 3\cos(7\pi y), & 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$