Questão 1: (2.5 pontos)
Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases} \qquad : f(x+6) = f(x)$$

(a) (1.0 ponto) Determine a Série de Fourier da função f

Solução:
Temos que $l = 3$ e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} xdx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{3}{3n\pi}x\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{3n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3 =$$

$$= -\frac{3}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1}).$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{3}{3n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{3n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

A Série de Fourier da função f é, então,

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{n^2\pi^2}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}\right). \tag{1a}$$

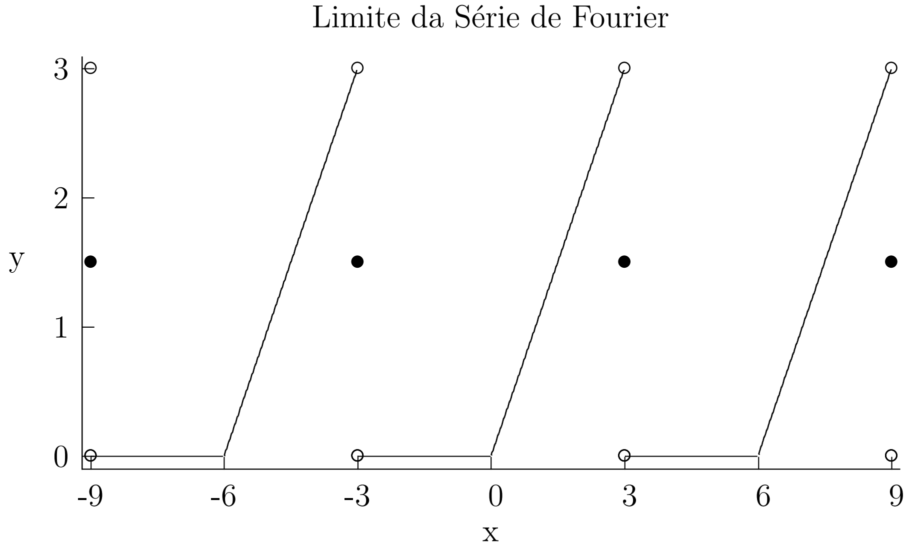
Podemos simplificar ainda mais a expressão se observamos que o termo $1 + (-1)^{n+1}$ se anula quando n é par e vale 2 quando n é ímpar. Então a Série de Fourier da f(x) é dada por

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{6}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3} + \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}\right). \tag{1b}$$

(b) (0.7 ponto) Esboce o gráfico da função para a qual a Série de Fourier converge no intervalo $[-9, 9]$. Justifique adequadamente.

Solução:
Basta analisar a função ao longo de um período. Consideremos o intervalo $[-3.3)$. Da expressão para $f(x)$ vemos que a função é contínua, a menos do ponto $x = -3$. Neste ponto existem os limites laterais dados por $f(-3^-) = 3$ e $f(-3^+) = 0$. Concluímos, portanto, que $f(x)$ é seccionalmente contínua.

Além disso, a derivada existe e é contínua no intervalo $[-3, 3)$, a menos dos pontos $x = -3$ e $x = 0$. Nestes pontos os limites laterais da derivada existem e são dados por $f'(-3^-) = 1$, $f'(-3^+) = 0$, $f'(0^-) = 0$ e $f'(0+) = 1$. Concluímos, portanto, que f' também é seccionalmente contínua e podemos aplicar o Teorema de Fourier. Dos limites citados e do Teorema de Fourier podemos obter o gráfico da função para a qual a Série de Fourier converge, lembrando que nos pontos em que a função é contínua a sua Série de Fourier converge para o valor da função e nos pontos em que a função é descontínua a sua Série de Fourier converge para a média aritmética dos limites laterais. Consequentemente, o gráfico é como a seguir.



(c) (0.8 ponto) Utilize o item (a) e o Teorema de Fourier para mostrar que $\dfrac{\pi^2}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}$

Solução:
Analisando a última expressão obtida para a Série de Fourier vemos que, se calcularmos a soma da série em $x = 0$ e usarmos o Teorema de Fourier, cujas hipóteses foram verificadas no item anterior, obteremos que

$$0 = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{6}{(2n-1)^2\pi^2}. \tag{1c}$$

Portanto, podemos escrever $\dfrac{3}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}$ e, daí, $\dfrac{\pi^2}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}$, como desejávamos.
O mesmo resultado poderia ser obtido se considerássemos os pontos $x = 3$ ou $x = -3$.

Questão 2: (2.0 pontos)
Obtenha todos os autovalores λ e respectivas autofunções $y(x)$ do problema de autovalor abaixo:

$$(I) \begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + \lambda y(x) = 0; \quad 0 < x < 1, & (2a) \\ y(0) = y(1) = 0. & (2b) \end{cases}$$

Solução:

A equação característica associada à EDO (2a) é $r^2 + 2r + \lambda = 0$. As raízes da equação característica são dadas por $r = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$. Vamos analisar os três casos possíveis (ver tabela resumo fornecida ao final das questões) que nos levam a obter as soluções gerais de (2a).

1. Raízes reais e distintas. Neste caso temos que $(1-\lambda) > 0$, isto é, $\lambda < 1$. Seja $\gamma = \sqrt{1-\lambda} > 0$, então a solução geral associada é dada por $y(x) = c_1 e^{(-1-\gamma)x} + c_2 e^{(-1+\gamma)x}$. Como $y(0) = 0$, concluímos que $c_2 = -c_1$ e, portanto, $y(x) = c_1 \left(e^{(-1-\gamma)x} - e^{(-1+\gamma)x}\right)$. Substituindo $x = 1$, temos que $0 = y(1) = c_1\left(e^{-1-\gamma} - e^{-1+\gamma}\right)$. Como $c_1 = 0$ não é aceitável pois implicaria em uma solução trivial (identicamente nula), obtemos que $e^{-1-\gamma} = e^{-1+\gamma}$. Como a exponencial é uma função injetiva, concluímos que $-1-\gamma = -1+\gamma$ e, portanto, $\gamma = 0$ e, daí, $\lambda = 1$. No entanto, para termos raízes reais distintas, é necessário que $\lambda < 1$ e, portanto, não temos autovalor quando as raízes da equação característica são reais e distintas.

2. Raízes reais iguais. Neste caso temos que $\lambda = 1$ e a solução geral é dada por $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. Como $y(0) = 0$, concluímos que $c_1 = 0$ e, portanto, a solução é da forma $y(x) = c_2 x e^{-x}$. Substituindo $x = 1$, temos que $0 = y(1) = c_2 e^{-1}$, que implicaria que c_2 também se anularia e a única solução é a trivial. Portanto, não temos autovalor quando as raízes da equação característica são iguais.

3. Raízes complexas conjugadas. Isto ocorrerá quando $(1-\lambda) < 0$, isto é, $\lambda > 1$. Seja $\gamma = \sqrt{\lambda - 1} > 0$, então as raízes da equação característica são $r = -1 \pm \gamma i$ e a solução geral é dada por $y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos \gamma x + c_2 \operatorname{sen} \gamma x\right)$. Como $y(0) = 0$, concluímos que $c_1 = 0$ e, portanto, $y(x) = c_2 e^{-x} \operatorname{sen} \gamma x$. Substituindo $x = 1$, temos que $0 = y(1) = c_2 e^{-1} \operatorname{sen} \gamma$. Não consideraremos a situação em $c_2 = 0$ pois isto implicaria que a solução obtida seria a solução trivial. Devemos ter, então, que $\operatorname{sen} \gamma = 0$ e, portanto, $\gamma = n\pi$, com $n \in \mathbb{N}^*$, já que $\gamma > 0$. Isto implica que $\lambda = (n\pi)^2 + 1$ e $y(x) = c_2 e^{-x} \operatorname{sen} n\pi x$.

Resumidamente, encontramos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = (n\pi)^2 + 1$ é um autovalor que tem autofunção associada dada por, $y_n(x) = e^{-x} \operatorname{sen} n\pi x$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$(I)\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \qquad (3a)\\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(2,t) = 4, & t > 0, \qquad (3b)\\ u(x,0) = 2x - 3\operatorname{sen} 3\pi x - 7 \operatorname{sen} 7\pi x, & 0 < x < 2. \qquad (3c)\end{cases}$$

(a) (0.3 ponto) Encontre a função $v(x)$ que satisfaz as condições de fronteira (3b) e $v_{xx} = 0$.

Solução:
Como $v_{xx}(x) = 0$, temos que $v(x)$ é da forma $v(x) = ax + b$. Para satisfazer as condições de fronteira devemos ter que $0 = b$ e $4 = 2a + b$. Portanto, $v(x) = 2x$.

(b) (0.7 ponto) Seja $w(x,t) := u(x,t) - v(x)$. Encontre o Problema de Valor Inicial e de Fronteira que $w(x,t)$ deverá satisfazer

Solução:
Como

- Como $w_t = u_t$ e $w_{xx} = u_{xx} - v_{xx} = u_{xx}$, concluímos que $w_t(x,t) - 4w_{xx}(x,t) = u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0$, se $0 < x < 2$ e $t > 0$,
- $w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = 0$, se $t > 0$,
- $w(2,t) = u(2,t) - v(2,t) = 4 - 4 = 0$, se $t > 0$ e
- $w(x,0) = u(x,0) - v(x) = 2x - 3\,\text{sen}\,3\pi x - 7\,\text{sen}\,7\pi x - 2x = -3\,\text{sen}\,3\pi x - 7\,\text{sen}\,7\pi x$, com $0 < x < 2$,

podemos concluir que $w(x,t)$ deverá satisfazer o seguinte PVIF

$$(II)\begin{cases} w_t(x,t) - 4w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad w(2,t) = 4, & t > 0, \\ w(x,0) = -3\,\text{sen}\,3\pi x - 7\,\text{sen}\,7\pi x, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

(c) (1.0 ponto) Encontre função $w(x,t)$ solução do problema do item (b). Utilize, se necessário, o lembrete ao final desta questão.

Solução:
No lembrete temos a expressão da solução formal que satisfaz a EDP e as condições de fronteira de (II), bastando tomar $\alpha = 2$ e $l = 2$. Substituindo estas constantes obtemos

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}.$$

Resta utilizar a condição inicial para identificar todos os coeficientes c_n. Substituindo $t = 0$ na expressão anterior obtemos que $w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$. Comparando com a condição inicial $w(x,0) = -3\,\text{sen}\,3\pi x - 7\,\text{sen}\,7\pi x$, vemos que basta tomarmos $c_6 = -3$, $c_{14} = -7$ e $c_n = 0$ para $n \notin \{6, 14\}$.
Portanto, a solução formal para o PVIF (II) é dada por

$$w(x,t) = -3e^{-36\pi^2 t}\,\text{sen}\,3\pi x - 7e^{-196\pi^2 t}\,\text{sen}\,7\pi x.$$

(d) (0.5 ponto) Encontre a solução $u(x,t)$

Solução:
Como $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, obtemos imediatamente que

$$u(x,t) = 2x - 3e^{-36\pi^2 t}\,\text{sen}\,3\pi x - 7e^{-196\pi^2 t}\,\text{sen}\,7\pi x.$$

Lembrete: Sabemos que a solução geral do problema abaixo

$$(II)\begin{cases} w_t(x,t) - \alpha^2 w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

é dada por $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\dfrac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{l}$

Questão 4: (3.0 pontos)
Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 9u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, & (4a) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, & (4b) \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \pi, & (4c) \\ u_t(x,0) = 5\cos 2x, & 0 < x < \pi. & (4d) \end{cases}$$

(a) (1.5 ponto) Utilizando o Método da Separação de Variáveis, obtenha as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

Solução:
Vamos aplicar a técnica de separação de variáveis para resolver o Problema de Valor Inicial e de Fronteira. Vamos procurar, por enquanto, funções não nulas que satisfaçam a EDP e que sejam da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Então, $u_{tt} = X(x)T''(t)$ e $u_{xx} = X''(x)T(t)$. Substituindo na EDP obtemos $XT'' - 9X''T = 0$. Rearranjando os termos e dividindo por $9X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{9T(t)} = -\lambda.$$

Notemos que o primeiro termo da equação acima só depende de x, o segundo termo só depende de t e como desejamos que sejam iguais para todo $t > 0$ e $x \in (0,\pi)$ concluimos que independem de x e t e, portanto, são uma constante. Denominamos esta constante como sendo $-\lambda$, sendo o sinal negativo apenas para seguir a notação do livro texto, pois o sinal escolhido não importa no resultado final.

Obtivemos, assim, as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t que são dadas por

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + 9\lambda T(t) = 0 \end{aligned}$$

Para resolver estas equações, deveremos encontrar as condições de fronteira adequadas de forma que $X(x)$ satisfaça um problema de autovalor, resolvê-lo e, finalmente, usar os autovalores obtidos na EDO envolvendo a variável t para obter as soluções $T(t)$. Abaixo iremos seguir este procedimento.

Inicialmente, vamos obter as condições de fronteira da EDO em x usando as condições de fronteira do problema proposto. Temos que $0 = u_x(0,t) = X'(0)T(t)$, para todo $t > 0$. Como não estamos interessados em solução trivial concluimos que $X'(0) = 0$. Analogamente, obtemos que $X'(\pi) = 0$. Usando estas condições nas EDOs obtidas anteriormente podemos obter o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

O procedimento a seguir visa obter os autovalores e autofunções do problema de autovalor acima.

A equação característica é dada por $r^2 + \lambda = 0$. Vamos analisar as três situações possíveis:

- Raízes da equação característica reais e distintas. Isto ocorrerá quando $\lambda < 0$ e as raízes serão $r_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $r_2 = -r_1$. A solução geral é dada por $X(x) = Ce^{r_1 x} + De^{-r_1 x}$. Derivando obtemos que $X'(x) = r_1 \left(Ce^{r_1 x} - De^{-r_1 x}\right)$. Aplicando a restrição $X'(0) = 0$ obtemos que $D = C$, já que $r_1 \neq 0$. A solução se torna $X(x) = C\left(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}\right)$. Substituindo $X'(\pi) = 0$ obtemos que $0 = X'(\pi) = Cr_1(e^{r_1 \pi} - e^{-r_1 \pi})$. Se $C = 0$ teríamos solução trivial, que não nos interessa e, como $r_1 \neq 0$ obtemos que $e^{r_1 \pi} = e^{-r_1 \pi}$. Como a exponencial é uma função injetiva, segue que $r_1 \pi = -r_1 \pi$, o que não é possível pois $r_1 \neq 0$. Concluimos que se $\lambda < 0$ não temos autovalor, já que a única solução é a trivial.

- Raízes da equação característica reais iguais. Isto ocorrerá quando $\lambda = 0$ e as raízes serão $r_1 = r_2 = 0$. A solução geral é dada por $X(x) = C + Dx$. Aplicando a restrição $X'(0) = 0$ obtemos que $D = 0$ e a solução se torna $X(x) = C$. A restrição $X'(\pi) = 0$ é satisfeita por esta solução e, portanto, concluímos que $\lambda_0 = 0$ é autovalor associado à autofunção $X_0(x) = 1$.

- Raízes da equação característica são complexos conjugados. Isto ocorrerá quando $\lambda > 0$ e as raízes serão $r_1 = \sqrt{\lambda}\sqrt{-1}$ e $r_2 = -\sqrt{\lambda}\sqrt{-1}$. Seja $\gamma = \sqrt{\lambda} > 0$. A solução geral é dada por $X(x) = C\cos\gamma x + D\sin\gamma x$. Derivando obtemos que $X'(x) = \gamma\left(-C \operatorname{sen}\gamma x + D\cos\gamma x\right)$. Aplicando a restrição $X'(0) = 0$ obtemos que $\gamma D = 0$ e, como $\gamma > 0$, concluímos que $D = 0$. Portanto, a solução se torna $X(x) = C\cos\gamma x$. Derivando e usando que $X'(\pi) = 0$ obtemos que $0 = X'(\pi) = -C\gamma\sin\gamma\pi$. Isto implica que ou $C = 0$ (que não nos interessa pois fornece solução trivial) ou $\sin\gamma\pi = 0$. Sabemos que o seno se anula nos pontos da forma $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então, como $\gamma > 0$, concluímos que $\gamma\pi = n\pi$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Daí temos que os autovalores correspondentes a $\lambda > 0$ são da forma $\lambda_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e suas autofunções correspondentes serão $X_n(x) = \cos nx$.

Em resumo, temos que os autovalores são dados por $\lambda_n = n^2$, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e as autofunções respectivas são dadas por $X_n(x) = \cos nx$, considerando como 1 o coeficiente da autofunção.

Com estes autovalores, podemos usar a EDO em t para obter $T_n(t)$. Temos, então, que $T_n'' + 9n^2 T_n(t) = 0$, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Se $n = 0$ temos que $T_0(t) = C_0 + D_0 t$. .

Se $n \in \mathbb{N}^*$ obtemos que a solução geral é dada por $T_n(t) = C_n \cos 3nt + D_n \operatorname{sen} 3nt$.

Em resumo, obtivemos que as soluções não nulas das EDOs são dadas por $X_0(x) = 1$, $T_0(t) = C_0 + D_0 t$, $X_n(x) = \cos nx$ e $T_n(t) = C_n \cos 3nt + D_n \operatorname{sen} 3nt$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nesta resposta consideramos como 1 o coeficiente das autofunções obtidas do problema de autovalor.

(b) (0.5 ponto) Obtenha a solução em série que satisfaz a EDP (4a) e as condições de fronteira (4b)

Solução:
Do item anterior temos que $u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = C_0 + D_0 t$, $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos nx(C_n \cos 3nt + D_n \operatorname{sen} 3nt)$. Finalmente, a série de funções que é candidata a solução do PVIF é da forma

$$u(x,t) = C_0 + D_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 3nt + D_n \operatorname{sen} 3nt) \cos nx. \tag{4e}$$

(c) (1.0 ponto) Analisando as condições iniciais do PVIF (4c) e (4d), obtenha a solução do problema dado.

Solução:
Resta, agora, utilizar as condições iniciais para obter todos os coeficientes C_n e D_n.
Tomando $t = 0$ na solução em séries vemos que

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx. \tag{4f}$$

Mas esta série trigonométrica é uma série de Fourier correspondente a uma função par e periódica de período 2π (basta comparar com a expressão para os termos em cosseno da Série de Fourier). Para satisfazer (4c), desejamos que $u(x,0) = x$ para $x \in (0,\pi)$. Vamos considerar a extensão par e periódica de período 2π da função $f(x) = x$, com $x \in (0,\pi)$. Como esta extensão é seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua e periódica de período 2π temos, pelo Teorema de Fourier, que a sua série de Fourier converge para $f(x)$ nos pontos em que esta for contínua. A Série de Fourier desta extensão é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ sendo} \tag{4g}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \tag{4h}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi n^2}(1 + (-1)^{n+1}) \tag{4i}$$

Comparando (4f) com (4g) e usando (4h) e (4i) concluímos que $C_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ e, também, que $C_n = a_n = -\dfrac{2}{\pi n^2}(1 + (-1)^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Ainda não utilizamos a condição da velocidade inicial (4d). Assumindo que a a derivada de $u(x,t)$ existe e é dada pela derivação termo a termo da série temos que

$$u_t(x,t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cos nx \left(-C_n \operatorname{sen} 3nt + D_n \cos 3nt\right). \tag{4j}$$

Aplicando em $t = 0$ obtemos que

$$u_t(x,0) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3n D_n \cos nx. \tag{4k}$$

Para satisfazer a equação (4d), basta compará-la com (4k). Vemos, então que $6D_2 = 5$ e $D_n = 0$ se $n \neq 2$.
Com os coeficientes obtidos temos que a solução desejada é dada por

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\cos 2x \operatorname{sen} 6t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}(1+(-1)^{n+1}) \cos nx \cos 3nt.$$

Como o termo $1 + (-1)^{n+1}$ se anula quando n é par e vale 2 quando n é ímpar, podemos simplificar ainda mais a expressão e obter

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\cos 2x \operatorname{sen} 6t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right) \cos\left(3(2n-1)t\right).$$

Formulário:

- Algumas integrais úteis:

$$\int_a^b x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \left(-\frac{lb}{n\pi}\cos\frac{n\pi b}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi b}{l}\right) - \left(-\frac{la}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{l}\right)$$

$$\int_a^b x \cos \frac{n\pi x}{l} = \left(\frac{lb}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi b}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi b}{l}\right) - \left(\frac{la}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi a}{l}\right)$$

- Tabela resumo para EDO de segunda ordem com coeficientes constantes. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica. Então:

$$\begin{array}{rcl} r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 & \Longrightarrow & y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 & \Longrightarrow & y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \\ r_1 = \alpha + \beta i,\, r_2 = \alpha - \beta i & \Longrightarrow & y(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x]. \end{array}$$