Questão 1: (2.5 pontos)

Seja f uma função 2π-periódica, tal que $f(x) = |\text{sen}(x)|$ se $x \in [-\pi, \pi)$.

(a) (1.0 ponto) Esboçe o gráfico de f no intervalo $[0, 2\pi]$.

(b) (1.5 ponto) Calcule a série de Fourier da função f.

Solução:

Como f é uma função par sua série de Fourier é: $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos\,(nx)$ onde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,(x)\,dx = \frac{4}{\pi} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,(x)\,cos\,(nx)\,dx \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots$$

Para $n = 1$, temos: $a_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} sen\,(x)\,cos\,(x)\,dx = 0$

Para $n \neq 1$, temos: $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} sen\,(x)\,cos\,(nx)\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,[(1+n)x] + sen\,[(1-n)x]\,dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)}\,, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Portanto a série pedida é: $\dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\,cos\,(2nx)$

Questão 2: (2.5 pontos)

Resolva o seguinte problema de autovalores (*Obs: todas as possibilidades de λ devem ser analisadas.*)

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Solução:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos ter:

(i) $\lambda = 0$ temos então:

$y'' = 0 \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y' = a$

Como $y'(0) = y(L) = 0$, segue que $a = b = 0$ e portanto y é a função nula.

(ii) $\lambda = -\sigma^2\,, \sigma > 0$ temos então:

$y'' - \sigma^2\,y = 0 \Rightarrow y = a\,sen\,h\,\sigma x + b\,cos\,h\,\sigma x \Rightarrow y' = a\,\sigma cos\,h\,\sigma x + b\,\sigma sen\,h\,\sigma x$

Como $y'(0) = y(L) = 0$, segue que $a = b = 0$ e portanto y é a função nula.

(iii) $\lambda = \sigma^2\,, \sigma > 0$ temos então:

$y'' + \sigma^2\,y = 0 \Rightarrow y = a\,sen\,\sigma x + b\,cos\,\sigma x \Rightarrow y' = a\,\sigma cos\,\sigma x - b\,\sigma sen\,\sigma x$

Como $y'(0) = 0$, temos $a = 0$. Sabendo que y não é a função nula e que $y(L) = 0$, segue que: $cos\,\sigma\, L = 0 \Rightarrow \sigma = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$ para $n = 1, 2, ...$

Logo os autovalores do problema dado são: $\lambda_n = \left[\dfrac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2$, para $n = 1, 2, ...$, associados às autofunções

$$y_n(x) = c_n cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Aplique separação de variáveis na equação diferencial parcial com condições de contorno abaixo, e encontre as equações diferenciais ordinárias (EDOs) envolvendo as variáveis x e t, com as respectivas condições de contorno. (*Obs: Não é necessário resolver as EDOs.*)

$$u_{tt} = (u + u_t)_{xx} \quad \text{para } (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Solução:

Seja $0 \neq u(x,t) = X(x)T(t)$ para (x,t) em $(0,L) \times (0,+\infty)$. Temos:

$$XT'' = X''T + X''T' \Leftrightarrow \frac{T''}{T+T'} = \frac{X''}{X} = \sigma \text{ (constante real)}$$

Por outro lado,
$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$
$0 = u(L,t) = X(L)T(t) \Rightarrow X(L) = 0$
Temos portanto a EDO $T'' - \sigma(T + T') = 0$ e o problema $= \begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere a equação de Laplace em coordenadas polares no domínio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$ (Ω *é dado pelo plano menos o disco de raio 3*), com condição de contorno definida abaixo.

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$
$$u(3,\theta) = 2 + \text{sen}(3\theta)$$

(a) (1.0 ponto) Aplique separação de variáveis na equação e encontre as EDOs associadas ao problema acima.

Solução:

Seja $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \neq 0$ em Ω , limitada e periódica de período 2π.

Temos: $r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{r^2R'' + rR'}{R} = -\dfrac{\Theta''}{\Theta} = \sigma$ (constante real)

Assim,as EDOs associadas ao problema dado são: $r^2R'' + rR' - \sigma R = 0$ e $\Theta'' + \sigma\Theta = 0$

(b) (2.0 pontos) Encontre a solução limitada do problema.

Solução:
Considerando as EDOs determinadas no item (a), como $\sigma \in \mathbb{R}$ podemos ter:

(i) $\sigma = 0$ temos então:
$\Theta'' = 0 \Rightarrow \Theta = a\theta + b\,, a, b \in \mathbb{R}$
Como Θ é $2\pi-$periódica devemos ter $a = 0$ e portanto $\Theta(\theta) = b\,, b \in \mathbb{R}$ ....(1)
Para $\sigma = 0$, a solução da EDO $r^2R'' + rR' = 0$ é $R(r) = c + d\,ln(r)\,, c, d \in \mathbb{R}$. Sendo u limitada quando $r \to +\infty$ devemos ter $d = 0$ e portanto $R(r) = c$ ....(2)
De (1) e (2) a solução correspondente a $\sigma = 0$ é: $u_0(r,\theta) = \dfrac{c_0}{2}\,, c_0 \in \mathbb{R}$ ....(3)

(ii) $\sigma = -\lambda^2\,, \lambda > 0$ temos então:
$\Theta'' - \lambda^2\,\Theta = 0 \Rightarrow \Theta = a\,sen\,h(\lambda\theta) + b\,cos\,h(\lambda\theta)$
Como Θ é $2\pi-$periódica devemos ter $a = b = 0 \Rightarrow \Theta = 0 \Rightarrow u = 0$

(iii) $\sigma = \lambda^2\,, \lambda > 0$ temos então:
$r^2R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = c\,r^{\lambda} + d\,r^{-\lambda}\,, c, d \in \mathbb{R}$
Como u é limitada quando $r \to +\infty$, devemos ter $c = 0$. Assim $R(r) = dr^{-\lambda}$............(4)
Por outro lado temos: $\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = a\,sen(\lambda\theta) + b\,cos(\lambda\theta)$.
Como Θ é $2\pi-$periódica devemos ter $\lambda = n\,, n = 1, 2, ...$ Voltando em (4), as soluções correspondentes para cada $n = 1, 2, ...$ são:

$$u_n(r,\theta) = r^{-n}(c_n cos(n\theta) + d_n sen(n\theta))\,, c_n, d_n \in \mathbb{R} \text{ para } n = 1, 2, ...$$

De maneira habitual a solução u por (2) e pelo visto anteriormente é da forma:

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(c_n cos(n\theta) + d_n sen(n\theta))\,, c_0, c_n, d_n \in \mathbb{R} \text{ para } n = 1, 2, ...$$

A condição $u(3,\theta)$ exige que:

$$2 + sen(3\theta) = \frac{c_0}{2} + 3^{-1}(c_1 cos(\theta) + d_1 sen(\theta)) + 3^{-2}(c_2 cos(2\theta) + d_2 sen(2\theta)) +$$
$$+3^{-3}(c_3 cos(3\theta) + d_3 sen(3\theta)) + \sum_{n=4}^{\infty} 3^{-n}(c_n cos(n\theta) + d_n sen(n\theta))$$

Temos portanto: $c_0 = 4 : c_n = 0\,, n = 1, 2, ...; d_3 = 3^3$ e $d_n = 0\,, n \neq 3$.