Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 2ª Prova Unificada
Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Turmas**: Engenharias 2^o Sem/2012
Código: MAC 248 — **Data**: 21/02/2013

---

(1) (3,0 p) Seja $f(x) = 1 + x$, $\quad 0 < x < 1$.

(a) Determine uma extensão ímpar e periódica de periodo 2 de f. (1,0 p)

(b) Determine a série de Fourier de senos que representa f para $0 < x < 1$. (1,0 p)

(c) Determine o gráfico da série de Fourier obtida no ítem (b) no intervalo $[-3, 3]$. (1,0 p)

Solução:

(a) Seja $\widetilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ extensão ímpar periódica de f de periodo 2.

Para $-1 < x < 0$ vale $\widetilde{f}(x) = -\widetilde{f}(-x) = -f(-x) = -(1-x) = x - 1$. **(0,2pt)**

Para $x = 0$ e $x = 1$ vale $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1) = 0$.

Portanto $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x-1\ , & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0\ , & \text{se } x = 0,\ x = 1 \\ x+1\ , & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$ **(0,5pt)**

e $\widetilde{f}(x+2) = \widetilde{f}(x)$ **(0,3pt)**

(b) Como $\widetilde{f}$ é ímpar $\widetilde{f}$ tem série de Fourier de senos: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)}$ **(0,1pt)**

onde $b_n = 2\displaystyle\int_0^1 (x+1)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$ **(0,2pt)**

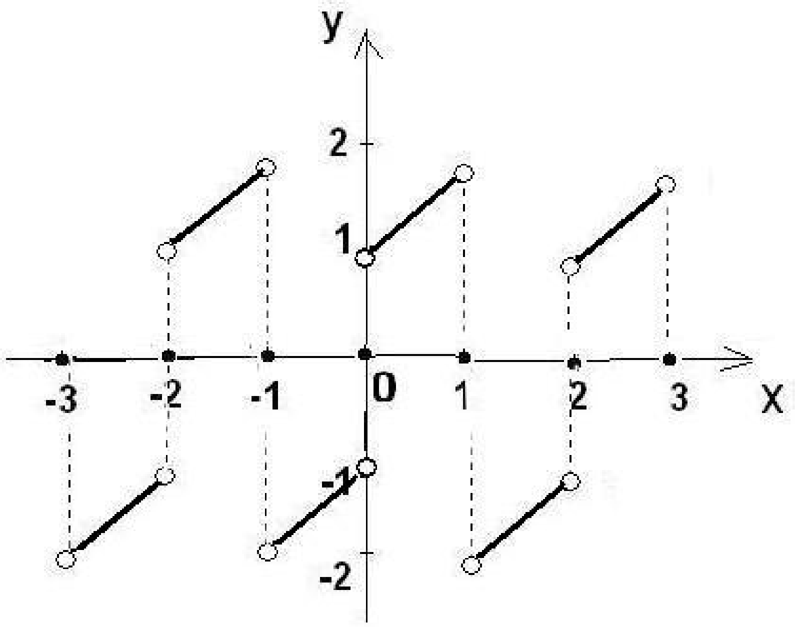
$$b_n = 2\left[(x+1)\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\right]\Bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x+1 & dv = \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \end{array}} = 2\left(\frac{-2\cos(n\pi)+1}{n\pi}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}\ , & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{6}{n\pi}\ , & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\,2}{n}\right) \quad \textbf{(0,5pt)}$$

Série de Fourier: $\boxed{\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\,2}{n}\right)\operatorname{sen}(n\pi x)}$ **(0,2pt)**

(c) Como a extensão ímpar de f é dada por



$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0, 1 \\ -1+x & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

observamos que $\pm 1 + x$ são polinômios logo continuas em cada subintervalo aberto, os limites laterais nos pontos $x = -1, 0, 1$ são finitos limitados por $-2, 0, 2$, assím podemos afirmar que $\widetilde{f}$ é continua por partes em $[-1, 1]$. Por outro lado, derivando $\widetilde{f}$, obtemos

$$\widetilde{f}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

logo contínua em cada subintervalo aberto, como os limites laterais são finitos limitados por 1, podemos dizer que $\widetilde{f}'$ é contínua por partes em o intervalo $[-1, 1]$. Além disso, podemo definir a extensão $\widetilde{f}$ em todo $\mathbb{R}$ fazendo $\widetilde{f}(x+2) = \widetilde{f}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, estamos nas condições do Teorema de Convergència da Série de Fourier. Pelo Teorema

$$S(\widetilde{f}; x) = \frac{\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

onde $S(\widetilde{f};x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$. ou equivalentemente

$$S(\widetilde{f};x) = \begin{cases} x-n+1 & \text{se } n < x < n+1, \quad n \text{ par} \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{Z}, \\ x-n-1 & \text{se } n-1 < x < n, \quad n \text{ par} \end{cases} \tag{3}$$

observemos que

$$S(\widetilde{f},0) = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$S(\widetilde{f};-1) = \frac{-2+2}{2} = 0$$

$$S(\widetilde{f};1) = \frac{-2+2}{2} = 0$$

...

$$S(\widetilde{f};n) = 0$$

(2) (2,0 p) Supondo $\lambda \in \mathbb{R}$ encontre as soluções do problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0\,, \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0 \quad X'(L) = 0 \end{cases}$$

estudando os 3 casos, $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Solução:

O polinômio característico associado à equação diferencial ordinária do problema é dado por:

$$y^2 + \lambda = 0 \tag{4}$$

Vamos analisar a solução de acordo com as três possibilidades abaixo:

i) $\lambda > 0$,

ii) $\lambda = 0$,

iii) $\lambda < 0$.

Caso i): $\lambda > 0$

As raízes do polinômio na equação (4) são $i.\mu$ e $-i.\mu$, onde $\mu = \sqrt{\lambda}$. A solução da E.D.O. é da forma:

$$X(x) = c_1 \cos(\mu.x) + c_2 \sin(\mu.x) \qquad \textbf{(0,2 pt).}$$

Derivando, temos:

$$X'(x) = -\mu.c_1 \sin(\mu x) + c_2.\mu \cos \mu.x.$$

Substituindo a condição $X'(0) = 0$, obtemos

$$0 = 0 + 1.c_2.\mu,$$

como $\mu > 0$ por hipótese, segue que $c_2 = 0$ **(0,2 pt).**

Substituindo a condição $X'(L) = 0$, obtemos

$$0 = -\mu c_1 \sin(\mu.L)$$

e portanto ou $c_1 = 0$ e obtemos a solução trivial $X(x) \equiv 0$, ou $\sin(\mu.L) = 0$ e nesse último caso

$$\mu.L = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{Z}^+. \quad \textbf{(0,2 pt)}$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, temos autovalores $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e autofunções $X_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L})$. **(0,2 pt)**

Observamos, finalmente, que qualquer combinação linear das X_n também é solução do problema.

Caso ii): $\lambda = 0$.

O polinômio característico tem uma única raiz dupla: $y_0 = 0$. A solução do problema é da forma:

$$X(x) = a.x + b. \qquad \textbf{(0,2 pt)}$$

Substituindo a condição $X'(0) = 0$, obtemos:

$$0 = a \qquad \textbf{(0,2pt)}$$

A segunda condição, $X'(L) = 0$ não nos fornece informações extras sobre a solução. Sendo assim, para o autovalor $\lambda = 0$, temos autofunção $X(x) = 1$. Qualquer múltiplo desta autofunção também verifica as condições do problema. **(0.2pt)**

Caso iii): $\lambda < 0$.

As raízes do polinômio característico são $\pm\mu$, onde $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

A solução do problema é da forma

$$X(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \sinh(\mu x) \qquad \textbf{(0,2 pt).}$$

Derivando a equação acima:

$$X'(x) = c_1\mu \sinh(\mu.x) + c_2\mu \cosh(\mu.x)$$

Substituindo a condição $X'(0) = 0$, obtemos:

$$c_2\mu = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \qquad \textbf{(0,2pt)}$$

Substituindo a segunda condição, obtemos

$$c_1\mu \sinh(\mu L) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Logo, neste caso, temos apenas a solução trivial $X(x) \equiv 0$. **(0,2pt)**.

Contagem de pontos:

- Caso i): 0,8 pt.
- Caso ii): 0,6 pt.
- Caso iii): 0,6 pt.

TOTAL: 2pts

(3) (2,5 p) Considere a condução de calor em uma barra de 40 cm de comprimento cujas extremidades esquerda e direita são mantidas, respectivamente, a 0^oC e a 80^oC para $t > 0$. Suponha que inicialmente a temperatura ao longo da barra seja 50^oC. Considere $\alpha^2 = 1$.

(a) Determine a temperatura de estado estacionário. (0,5 p)

(b) Determine a expressão da temperatura $u(x,t)$ para $t \geq 0$. (2,0 p)

Solução:

item (a) A temperatura estacionária não depende do tempo. Seja $v(x)$ tal temperatura, então $v(x)$ satisfaz a equação do calor, que neste caso se traduz por:

$$v_{xx} = 0.$$

Segue da equação acima que $v(x) = a.x + b$. **(0,2pt)**

A condição de contorno $v(0) = 0$ nos dá $b = 0$. A condição de contorno $v(40) = 80$ nos dá $a = 2$. A temperatura no estado estacionário é dada por: $v(x) = 2x$. **(0,3 pt)**

TOTAL ítem (a): 0,5 pt

item (b) A solução do problema do calor com condições de contorno não homogêneas não é obtida diretamente pelo método de separação de variáveis. Ela é dada por:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

onde v é a temperatura estacionária e w é a temperatura transiente.

A função $w(x,t)$ é solução de um problema com condições de contorno homogêneas:

$$w_{xx} = w_t$$
$$w(0,t) = 0$$
$$w(40,t) = 0$$
$$w(x,0) = 50 - 2x.$$

Modelagem: 0,5 pt

A solução deste problema homogêneo é da forma:

$$w(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{40}\right) e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{1600}}. \quad \textbf{(0,4pt)}.$$

Para encontrar b_n, usamos a condição inicial $w(x,0) = 50 - 2x$. Temos

$$b_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} (50-2x) \sin\left(\frac{n\pi x}{40}\right). \quad \textbf{(0,4pt)}.$$

Resolvendo a integral, encontramos

$$b_n = \frac{20}{n\pi}(3\cos(n\pi) + 5) = \frac{20}{n\pi}(5 + (-1)^n.3).$$

A solução do problema é dada por

$$u(x,t) = 2x + \frac{20}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{5 + (-1)^n.3}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{40}\right) e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{1600}}. \quad \textbf{(0,7pt)}.$$

TOTAL do item (b): 2 pts.

(4) (2,5 p) Considere o problema da onda

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}\ , & 0 < x < \pi\ , \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0\ , & u_x(\pi,t) = 0\ , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 2\ , & u_t(x,0) = 0\ , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Encontre a expressão do deslocamento vertical $u(x,t)$ **usando o método de separação de variáveis**. Justifique cada etapa. Considere $a > 0$. (Sugestão: Use a questão (2) com $L = \pi$).

Solução:

Utilizando o método de separação de variáveis, vamos encontrar funções da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5}$$

que sejam soluções da equação da onda e satisfaçam as condições homogêneas

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \tag{6}$$

Substituindo a expressão em (5) na equação obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda,$$

onde λ deve ser uma constante. Chegamos então nas duas equações diferenciais

$$X'' + \lambda X = 0 \ \text{ e } \ T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{7}$$

Usando (5) e (6), obtemos

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)T(t),$$
$$0 = u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t),$$
$$0 = u_t(x,0) = X(x)T'(0).$$

Assim, se queremos u não nula, devemos ter $X'(0) = 0 = X'(\pi)$ e $T'(0) = 0$. Chegamos então no seguinte problema de valores de contorno

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0 = X'(\pi)$$

e no problema de valor inicial

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad T'(0) = 0.$$

Usando a questão 2, vimos que os auto-valores do PVC acima são $\lambda_0 = 0$ associado à autofunção $X(x) = 1$ e $\lambda_n = (n\pi/\pi)^2 = n^2$, onde $n \in \mathbb{N}$, cujas auto funções associadas são $X_n(x) = \cos(n\pi x/\pi) = \cos nx$. Com $\lambda_0 = 0$, o PVI se torna $T''(t) = 0, \quad T'(0) = 0$, e este tem a função $T_0 = 1$ como base de soluções. Para $\lambda_n = n^2$ o PVI se torna $T'' + a^2n^2T = 0, \quad T'(0) = 0$. A equação tem como solução geral

$$T(t) = k_1\cos(nat) + k_2\text{sen}(nat).$$

Usando a condição inicial $T'(0) = 0$ temos

$$0 = T'(0) = -k_1na\text{sen}(na0) + k_2na\cos(na0) = k_2na,$$

donde concluimos que k_2 deve ser zero e que $T_n(t) = \cos(nat)$ é uma base para as soluções. Chegamos então à seguinte família de soluções fundamentais

$$u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = 1,$$
$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(nx)\cos(nat).$$

Como a equação é linear e as condições em (6) são homogêneas, aplicamos o princípio de superposição e obtemos uma solução geral da forma

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx)\cos(nat).$$

Agora, impondo a condição inicial não-homogênea, temos

$$2 = u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx).$$

Então a série acima deve ser a série em cossenos da função $f(x) = 2$ que é par e tem período 2π. Assim, $c_0 = 4$ e $c_n = 0$, $n \geq 1$. De fato,

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2dx = 4,$$
$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(nx)dx = 0.$$

Assim, a solução encontrada tem a forma $u(x,t) = 2$. Note que esta solução é natural, pois o problema em questão modela uma corda elástica de comprimento π cujos extremos podem se movimentar liveremente no sentido vertical, estando tal corda na posição inicial $u = 2$ e sem velocidade inicial.