Questão 1: (3.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, com $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$. Encontre a série de potências que representa $f(x)$ em uma vizinhança de $x = 0$ (se desejar, use o lembrete ao final do enunciado da questão)

(b) (0.8 ponto) Seja a Equação Diferencial Ordinária (EDO) dada por

$$(x^2-1)y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = 0 \tag{1a}$$

Verifique que $x = 0$ é ponto ordinário desta EDO e encontre a relação de recorrência da solução em série de potências da EDO (1a) em torno de $x_0 = 0$.

(c) (0.7 ponto) Encontre a solução geral da EDO (1a) em torno de $x_0 = 0$ explicitando as duas soluções linearmente independentes. Calcular, no mínimo, os quatro primeiros termos não nulos de cada solução linearmente independente.

(d) (0.5 ponto) Determine o raio de convergência mínimo da solução desta EDO em Séries de Potências em torno do ponto $x_0 = 0$.

Lembrete: Sabemos que a soma dos termos de uma série geométrica da forma $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, com $|q| < 1$, é dada por $\dfrac{a}{1-q}$.

Questão 2: (2.0 pontos)

Faça o que se pede

(a) (1.0 ponto) Determine a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(4s^2-s+3)e^{-4s}}{(s^2+1)(s-1)}\right\}$

(b) (1.0 ponto) Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leqslant t < 2, \\ 8-3t, & \text{se } 2 \leqslant t < 3 \\ 0, & \text{se } t \geqslant 3. \end{cases}$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

(a) (0.5 ponto) Seja $\tilde{f}(x)$ a extensão de $f(x)$ que é ímpar, periódica, com período 4, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Faça o gráfico de $\tilde{f}(x)$ no intervalo $[-2, 6]$

(b) (1.0 ponto) Encontre a Série de Fourier da função $\tilde{f}(x)$.

(c) (0.5 ponto) Calcule a soma da Série de Fourier do item anterior no ponto $x = -1$.

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) + u(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, & \text{(4a)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0, & \text{(4b)} \\ u(x,0) = 3\,\text{sen}\,4x + 2\,\text{sen}\,8x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, & \text{(4c)} \end{cases}$$

(a) (2.0 pontos) Utilizando o Método da Separação de Variáveis, obtenha as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

(b) (0.5 ponto) Obtenha a solução em série que satisfaz a EDP (4a) e as condições de fronteira (4b)

(c) (0.5 ponto) Analisando a condiçâo inicial do PVIF (4c), obtenha a solução do problema dado.

Regras:

- Duração da prova: 150 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.

LEMBRETES E TABELAS

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t).g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{e^{ct}g(t)\right\} = G(s-c)$
- $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s).G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(s)$
- $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$

Tabela resumo para EDO de segunda ordem com coeficientes constantes

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica. Então:

$$\begin{array}{rcl}
r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 & \Longrightarrow & y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \\
r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 & \Longrightarrow & y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x} \\
r_1 = \alpha + \beta i,\, r_2 = \alpha - \beta i & \Longrightarrow & y(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x].
\end{array}$$