Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Prova Final

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias $2^{\underline{o}}$ Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 01/12/2011

Questão 1. (2,5 pontos).

Encontre a solução em série de potências, em torno de $x_0 = 0$, da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + xy' + 2y = 0,$$

com condições iniciais $y(0) = 4$ e $y'(0) = -1$.

Questão 2. (2,5 pontos).

Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 2\delta(t-1) + 7\delta(t-3), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Questão 3. (2,5 pontos). Dado $k \in \mathbb{N}$ considere a função periódica f, definida por

$$f(x) = 1 - x^{2k},\ x \in [-1,1],\ \text{tal que}\ f(x+2) = f(x)\ \text{para todo}\ x \in \mathbb{R}$$

e sua série de Fourier associada $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\Big)$.

a) (1,5 ponto) Integrando por partes prove que $|a_n| \leq 8\left(\dfrac{k}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$.

b) (1,0 ponto) Utilizando o item (a) mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n| + |b_n|\big) < \infty$.

Questão 4. (2,5 pontos). Determine a solução do problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 + 2x - x^2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Transformadas de Laplace **NO VERSO**

Tabela básica de transformada de Laplace.

Suponha que $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = G(s)$ se $s > \alpha$

- $\mathcal{L}\left\{u_a(t) \cdot g(t-a)\right\} = e^{-as}G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{e^{bt}g(t)\right\} = G(s-b)$ se $s > \alpha + b$
- $\mathcal{L}\left\{g(ct)\right\} = \frac{1}{c}G(\frac{s}{c})$ se $s > c\alpha$ e $c > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$ se $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ se $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$ se $s > |a|$
- $\int_0^\infty \delta(t-a)h(t)\,dt = h(a)$ se $h(t)$ for contínua em $[0, \infty[$.
- $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$ se $s \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}\{\int_0^t g(\xi)\,d\xi\} = \frac{G(s)}{s}$
- $\mathcal{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\} = s^nG(s) - s^{n-1}g(0) - \cdots - g^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ para $s > a$
- $\mathcal{L}\{t\,g(t)\} = -\frac{d}{ds}G(s)$

Professores: Albetan Mafra, Samuel Senti, AdÃ¡n Corcho, Henrique ......, Felipe............