Questão 1: (2.5 pontos)

Resolva a seguinte equação diferencial ordinária

$$y''(t) + y(t) = 2\delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solução:

Denotemos $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, logo

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2\,e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}.$$

Utilizando as condições iniciais concluímos que

$$Y(s)\,(s^2+1) - 1 = 2\,e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}.$$

Assim

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(1 + 2\,e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}\right).$$

Finalmente, pelas fórmulas da tabela temos

$$y(t) = \operatorname{sen} t + 2\,u_\pi(t)\,\operatorname{sen}(t-\pi) + u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi).$$

Questão 2: (2.5 pontos)

(a) (1.5 ponto) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Sabendo que f é analítica em 0, encontre sua série de Taylor centrada neste ponto.

(b) (1.0 ponto) Calcule o raio de convergência da série encontrada no item anterior.

Solução:

Temos que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Logo

$$\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Temos:

$$\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}\right| = \left|\frac{x^2(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!}\right| = \left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right|,$$

e para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0$$

Logo, concluímos pelo teste da razão que a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, e seu raio de convergência é $r = \infty$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$y''(x) + (x-1)y(x) = x^2 \qquad (*)$$

Verifique que $x = 1$ é ponto ordinário da equação. Encontre a relação de recorrência da solução em série de potências de $(*)$, em torno de $x = 1$.

Solução:

Os coeficientes da equação são polinômios em x, e o coeficiente de y'' é não nulo em $x = 1$. Logo, $x = 1$ é ponto ordinário da equação.

Escrevo a solução em séries de potências em torno de $x = 1$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

Substituindo no lado esquerdo da equação obtenho:

$$y''(x) + (x-1)y(x) = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1}\right](x-1)^n.$$

Escrevo o lado direito da equação em série de potências em torno de $x = 1$:

$$x^2 = (x-1+1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2.$$

Comparando os coeficientes das potências de $x - 1$ obtenho a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{2-a_0}{6} \\ a_4 &= \frac{1-a_1}{12} \\ a_{n+2} &= -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 3. \end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \text{ em } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = 10, \quad u(1,t) = 20, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 10 + 10x + \operatorname{sen}(11\pi x) \end{cases} \qquad (**)$$

Utilizando que o problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0 \end{cases}$$

tem soluções não triviais apenas quando $\lambda = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, ...$ dadas por

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x),$$

aplique o método de separação de variáveis e encontre a solução do problema (**).

Solução:

Observamos pelo princípio da superposição que a solução $u(x,t)$ pode ser escrita como

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

onde

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} \ \text{ em } \ (0,1)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = 10, \ \ u(1,t) = 20, \ \ t > 0 \end{cases} \qquad (*1)$$

e

$$\begin{cases} w_t = 4w_{xx} \ \text{ em } \ (0,1)\times(0,\infty) \\ w(0,t) = 0, \ \ w(1,t) = 0, \ \ t > 0 \\ w(x,0) = 10 + 10x + \operatorname{sen}(11\pi x) - v(x,0). \end{cases} \qquad (*2)$$

Note que que $v(x,t) = 10x + 10$ satifaz o problema $(*1)$, e neste caso $(*2)$ fica da forma:

$$\begin{cases} w_t = 4w_{xx} \ \text{ em } \ (0,1)\times(0,\infty) \\ w(0,t) = 0, \ \ w(1,t) = 0, \ \ t > 0 \\ w(x,0) = \operatorname{sen}(11\pi x). \end{cases} \qquad (**2)$$

Buscamos agora a solução de $(**2)$ pelo método de separação de variáveis, isto é supomos $w(x,t) = X(x)T(t)$. Assim temos as seguintes equações:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \ X(1) = 0$$

$$T' + 4\lambda T = 0.$$

Pelo enunciado do problema sabemos que o problema de autovalores acima tem solução não trivial apenas quando $\lambda = n^2\pi^2, \ \ n = 1, 2, 3, ...$ dadas por

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x),$$

e para estes valores de λ a equação para T tem soluções:

$$T_n(t) = e^{-4n^2\pi^2 t}, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Assim, busco uma solução da forma $w(x,t) = \displaystyle\sum_{n-1}^{\infty} a_n sen(n\pi x) e^{-4n^2\pi^2 t}$. Dos dados iniciais temos:

$$sen(11\pi x) = w(x,0) = \sum_{n-1}^{\infty} a_n sen(n\pi x)$$

E das relações de ortogonalidade das funções $sen(n\pi x)$ no intervalo $(-1,1)$ concluímos que

$$a_{11} = 1 \text{ e } a_n = 0\,, n \neq 11$$

Finalmente, temos que a solução do problema dado é: $u(x,t) = 10x + 10 + sen(11\pi x)e^{-4(11)^2\pi^2 t}$