Questão 1: (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Obtenha os cinco primeiros termos da série de Taylor da função $f(x) = \cos x$ em torno de $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Solução:
Da definição de série de Taylor temos que:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n \tag{1}$$

Por outro lado segue que:

$$\begin{aligned}
& f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & \\
& f'(x) = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow & f'(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
& f''(x) = -\cos x \Longrightarrow & f''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
& f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow & f^{(3)}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
& f^{(4)}(x) = \cos x \Longrightarrow & f^{(4)}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}; ...
\end{aligned}$$

Do resultado acima obtemos que:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{96}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + ...$$

(b) (1.0 ponto) Classifique a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2 + 2n + 1} \tag{2}$$

em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

Solução:
Vamos verificar se converge absolutamente usando o teste da comparação no limite. Seja a p-série se ordem 1 (série harmônica) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Temos, pelo teste da integral, que esta é divergente e, também,

$$\left(\frac{n+2}{n^2 + 2n + 1}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n(n+2)}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1 + 2/n^2}{1 + 2/n + 1/n^2}.$$

Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n^2 + 2n + 1}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\right) = 1$ e, pelo teste da comparação no limite, temos que a série

$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+2n+1}$ diverge, já que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ também diverge. Isto mostra que não há convergência absoluta da série proposta.

Vamos tentar aplicar o teste de Leibniz para verificar a convergência condicional da série. Temos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+2n+1} = 0$, aplicando a Regra de L'Hopital. Os termos alternam sinal pois $\displaystyle\frac{n+2}{n^2+2n+1} > 0$ e, finalmente, é decrescente pois

$$\frac{n+2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{((n+1)+1)^2} = \frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+2(n+1)+1}.$$

Isto mostra que a série é alternada, descrescente e com termo geral tendendo a zero. Portanto, pelo teste de Leibniz ela é convergente. Temos, então, uma série convergente e que não é absolutamente convergente, provando que é condicionalmente convergente.

Questão 2: (2.0 pontos)
Considere o problema de valor inicial dado abaixo:

$$\begin{cases} (x^2+1)\ y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Supondo que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ resolva o que se pede:

(a) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência ;

Solução:
Temos que

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + 6\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + 6a_1 x + 6\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$
$$+ 4a_0 + 4a_1 x + 4\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou equivalentemente,

$$4a_0+2a_2+10a_1x+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2}+n(n-1)a_n+6na_n+4a_n\right\}x^n=0,$$

ou equivalentemente,

$$4a_0+2a_2=0 \Longrightarrow a_2=-2a_0 \Longrightarrow a_2=0,\ \text{pois das condições iniciais } a_0=0;$$

$$10a_1+6a_3=0 \Longrightarrow a_3=-\frac{5}{3}a_1 \Longrightarrow a_3=-5/3 \text{ pois das condições iniciais } a_1=1;$$

$$\text{relação de recorrência: } a_{n+2}=-\frac{n^2+5n+4}{(n+2)(n+1)}a_n=-\frac{n+4}{n+2}a_n,\ n=2,3,... \qquad ((9))$$

(b) (1.0 ponto) Encontre a solução em série de potências para o problema de valor inicial dado.

Solução:
De (8) temos que:

$$\begin{array}{lcl}
a_4=\dfrac{6a_2}{4} & \Longrightarrow & a_4=0;\\
a_{2n}=0; & & \\
a_5=-\dfrac{7a_3}{5} & \Longrightarrow & a_5=\dfrac{7}{3};\\
a_7=-\dfrac{9a_5}{7} & \Longrightarrow & a_7=\dfrac{9}{3};\\
a_9=-\dfrac{11a_7}{9} & \Longrightarrow & a_9=\dfrac{11}{3};\\
a_{2n+1}=(-1)^n\dfrac{2n+3}{3}. & &
\end{array}$$

Então $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{3}x^{2n+1}$

Questão 3: (2.0 pontos)
Resolva o problema da valor inicial dado abaixo utilizando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=f(t)\\ y(0)=1; \quad y'(0)=0\end{cases} \qquad \text{onde} \qquad f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ t-1, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

Solução:

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}-4\mathcal{L}\{y(t)\}=s+\mathcal{L}\{f(t)\},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=\frac{s}{s^2-2^2}+\frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{(s+2)(s-2)}. \qquad ((1))$$

Temos que:

$$f\ (t) = (t-1)u_1(t) \Longrightarrow \mathcal{L}\left\{f\ (t)\right\} = \frac{e^{-s}}{s^2}. \qquad ((2))$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \frac{s}{s^2-2^2} + e^{-s}\left[\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right].$$

ou equivalentemente,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left[\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right]\right\}. \qquad ((3))$$

(i) Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-2^2}\right\}$. Pela tabela temos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2^2}\right\} = \cosh 2t. \qquad ((4))$$

(ii) Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right\}$Temos que:

$$\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2},$$

ou equivalentemente,

$$1 = A(s^2-4) + Bs(s^2-4) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s-2). \qquad ((5))$$

De $(5) : A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$, $B + C + D = 0$ e $A + 2C - 2D = 0$.

Então $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{16}$ e $D = -\dfrac{1}{16}$. Logo:

$$\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)} = -\frac{1/4}{s^2} + \frac{1/16}{s-2} - \frac{1/16}{s+2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right\} = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{1}{16}e^{-2t}. \qquad ((6))$$

(iii) Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left[\dfrac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right]\right\}$. De (6) segue que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left[\frac{1}{s^2(s-2)(s+2)}\right]\right\} = u_1(t)\left[-\frac{1}{4}(t-1) + \frac{1}{16}e^{2(t-1)} - \frac{1}{16}e^{-2(t-1)}\right] \qquad ((7))$$

Substituindo (4) e (7) em (3) resulta que:

$$y(t) = \cosh 2t + \frac{1}{16}u_1(t)\left[-4(t-1) + e^{2(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right].$$

Questão 4: (4.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 9u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < 3. \end{cases} \qquad \text{com} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3x, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0, & 2 \leqslant x < 3. \end{cases}$$

(a) (1.5 ponto) Ache a extensão ímpar e periódica de período 6 da função $g(x)$. Faça seu gráfico no intervalo $[-6, 6]$ e determine a Série de Fourier desta extensão.

Solução:
A expressão para a extensão ímpar e periódica de período 6, que denotaremos $\tilde{g}$ é dada por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 3x, & x \in (-2,-1] \cup [1,2), \\ 0, & x \in [-3,-2] \cup (-1,1) \cup [2,3], \\ \tilde{g}(x+6), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}, \text{ com } b_n = \frac{2}{3} \int_1^2 3x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx.$$

Realizando a integração obtemos:

$$b_n = \frac{6}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - 2 \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right)$$

Isto implica que a série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - 2 \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}.$$

(b) (0.5 ponto) Supondo que a solução é da forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ (ou, se desejar, $u(x,t) = X(x)T(t)$), determine as duas equações diferenciais ordinárias associadas;

Solução:
Suponhamos que $u(x,t) = F(x)G(t)$. Para que $u(x,t)$ satisfaça a EDP deveremos ter que $F(x)G''(t) - 9F''(x)G(t) = 0$. Isto implica que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{9G(t)} = \sigma. \tag{3}$$

Então temos as seguintes EDOs:

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0, & x \in (0.3) \\ G''(t) - 9\sigma G(t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

(c) (1.0 ponto) Obtenha os autovalores e respectivas autofunções do problema de valor de contorno correspondente a $F(x)$ (ou $X(x)$);

Solução:
Das condições de fronteira temos que $u(0,t)=0$. Portanto ou $F(0)=0$ ou $G(t)\equiv 0$. A última opção não nos interessa pois implica que $u(x,t)\equiv 0$. Analogamente obtemos que $F(3)=0$. Vamos resolver o Problema de Valores de Contorno dado por

$$\begin{cases} F''(x)-\sigma F(x)=0, & x\in(0.3) \\ F(0)=0, \quad F(3)=0 \end{cases}$$

A equação característica é dada por $r^2-\sigma=0$ com raízes dadas por $r=\pm\sqrt{\sigma}$. Analisando a EDO obtida:

i Se $\sigma>0$ temos que $F(x)=Ce^{-\sqrt{\sigma}x}+De^{\sqrt{\sigma}x}$. Como $F(0)=F(3)=0$ obtemos que $C=-D$ e $C\,\mathrm{senh}(3\sqrt{\sigma})=0$. Então, $C=D=0$ ou $3\sqrt{\sigma}=0$, o que não é possível pois, por hipótese, $\sigma>0$. Concluímos que $C=D=0$ e, portanto, só temos a solução trivial.

ii Se $\sigma=0$ temos que $F(x)=Cx+D$. Como $F(0)=F(3)=0$ obtemos que $D=0$ e $C=0$. Concluímos, portanto, que só temos a solução trivial.

iii Se $\sigma<0$ temos que a solução é da forma $F(x)=C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\sigma}\,x+D\cos\sqrt{-\sigma}\,x$. Usando as condições de fronteira obtemos que $D=0$ e $\mathrm{sen}\,3\sqrt{-\sigma}=0$. Para que tenhamos solução não nula segue que $3\sqrt{-\sigma}=n\pi$ e, daí. temos que os autovalores são dados por $\sigma_n=-\dfrac{n^2\pi^2}{9}$ e as autofunções $F_n(x)=\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{3}$, com $n\in\mathbb{N}^*$, já que $\sigma<0$.

(d) (1.0 ponto) Analisando as condições iniciais do PVIF, obtenha a solução do problema dado.

Solução:
Das condições iniciais temos que $u(x,0)=0$. Portanto ou $G(0)=0$ ou $F(x)\equiv 0$. A última opção não nos interessa pois implica que $u(x,t)\equiv 0$. Então, como temos que $\sigma_n=-\dfrac{n^2\pi^2}{9}$, resolvendo a EDO e usando que $G_n(0)=0$, obtemos que $G_n(t)=C_n\,\mathrm{sen}\,n\pi t$. Isto implica que $u_n(x,t)=C_n\,\mathrm{sen}\,n\pi t\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{3}$. Então, a expressão geral da solução será dada por

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,\mathrm{sen}\,n\pi t\ \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}.$$

Derivando termo a termo em relação a t e aplicando em $t=0$ obtemos

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi C_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{3}.$$

Desejamos encontrar coeficientes C_n tais que a expressão acima corresponda à função $g(x)$. Comparando com a série de Fourier da extensão ímpar e periódica de período 6 da função $g(x)$ obtida anteriormente no item (a), temos que $C_n=\dfrac{b_n}{n\pi}$, isto é,

$$C_n=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-2\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}\right).$$

Temos, então, que a solução do problema é dada por

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-2\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)\operatorname{sen} n\pi t\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}.$$